N° 9326

AGREGATION DE DYNAMIQUES DE PRIX ET MODELES A FACTEURS A COEFFICIENTS STOCHASTIQUES

GOURIEROUX, C (*) et I., PEAUCELLE (**)

Septembre 1993

(*) CREST-CEPREMAP

(**) CNRS-CEPREMAP

Agregation de dynamiques de prix et modèles
à facteurs à coefficients stochastiques

Le but de cet article est de discuter l'utilisation de modèles à facteurs pour l'étude jointe d'un ensemble d'évolutions de prix. Plus précisement nous nous intéressons à diverses conditions de cohérence, qui devraient être introduites : celles résultant d'absence d'opportunité d'arbitrage asymptotique, celles permettant une invariance de la formulation à facteurs par agrégation de type indice de Laspeyres ou celles décrivant des contraintes de non persistence. Ceci nous conduit naturellement à introduire des modèles à facteurs à coefficients stochastiques.

Aggregation of price dynamics and factor
models with random coefficients

The aim of this paper is to study factor modelling for the joint analysis of several price evolutions. More precisely we exhibit different coherency conditions, either characterizing some asymptotic no arbitrage opportunity, or allowing some invariance property of the factor modelling with respect to price aggregation via Laspeyres index, or corresponding to constraints of no persistence. Then we are naturally led to introduce random coefficients for the factors.

Mots clefs : Indice de prix, modèles à facteurs, coefficients stochastiques, agrégation, arbitrage.

Keywords : Price index, factor modelling, stochastic coefficients, aggregation, arbitrage opportunity.

J.E.L : C43

I INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans cet article aux problèmes d'agrégation de dynamiques de prix. Ce problème est habituellement traité en environnement certain. Dans les formulations les plus simples, on suppose que les taux d'accroissement des prix sont constants pour chacun des bien ℓ :

$$P_{\ell,t}/P_{\ell,t-1} = \gamma_\ell,$$

ce qui revient à retenir une évolution stationnaire de ces taux et à supposer que le niveau des prix admet une évolution exponentielle : $P_{\ell,t} = P_{\ell,o} \exp \gamma_\ell t$.

On peut alors analyser l'évolution globale des prix par l'intermédiaire d'un indice. Retenant un indice de Laspeyres :

$$I_t = \sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o} P_{\ell,t} \Big/ \sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o} P_{\ell,o},$$

où $q_{\ell,o}$, l=1,...L désignent les quantités de l'année de base, on voit que l'indice est une combinaison d'exponentielles et est asymptotiquement de forme exponentielle :

$$I_t \sim A \exp(\bar{\gamma} t), \text{ avec } \bar{\gamma} = \underset{\ell}{\mathrm{Max}} (\gamma_\ell).$$

Il correspond donc à un taux d'évolution asymptotiquement stationnaire $I_t / I_{t-1} \sim \bar{\gamma}$.

Finalement on analyse souvent la cohérence à long terme de ces évolutions de prix. Si par exemple les biens k et ℓ sont substituables, si $\gamma_k > \gamma_\ell$, le prix du bien k devient infiniment plus élevé que celui du bien ℓ et la demande correspondante des consommateurs devient nulle. Ainsi l'un des marchés celui d'indice k n'existe plus asymptotiquement. On introduit ainsi dans les modèles de croissance des conditions d'existence asymptotique des marchés qui, pour ces biens substituables, se traduit par la condition : γ_ℓ, indépendant de ℓ.

Dans les premiers paragraphes, nous commençons par généraliser les résultats précédents lorque l'environnement est incertain. Dans le paragraphe 2 nous introduisons un modèle d'évolution de prix, où les processus de modifications relatives de prix sont supposés stationnaires, au sens aléatoire du terme. Nous dérivons alors le comportement asymptotique des prix, mettant en évidence une partie exponentielle déterministe et une partie exponentielle aléatoire.

Dans le paragraphe 3, nous considérons la dynamique de l'indice de Laspeyres associé. Nous établissons en particulier que son taux d'évolution ne peut être un processus asymptotiquement stationnaire (sauf dans le cas dégénéré de l'environnement certain). Ainsi l'hypothèse de stationnarité des taux d'évolution ne peut être utilisée simultanément à des niveaux agrégé et désagrégé.

Dans le paragraphe 4, nous recherchons des conditions de cohérence entre évolutions de prix par des raisonnements d'arbitrage. On aboutit naturellement à la condition que les moments $m_\ell = E[\text{Log}(P_{\ell,t}/P_{\ell,t-1})]$ doivent être indépendants du bien. Cette condition diffère de la condition $\gamma_\ell = E(P_{\ell,t}/P_{\ell,t-1})$ indépendant de ℓ (sauf dans le cas d'environnement certain) et permet en fait de prendre en compte le prix du risque qui peut différer selon les biens. Lorsqu'elle est satisfaite, les prix et l'indice continuent à avoir des évolutions exponentielles, dont les paramètres aléatoires peuvent différer sensiblement.

Dans le paragraphe 5, nous discutons les modèles à facteurs habituellement introduits pour décrire les évolutions jointes de diverses séries (voir e.g Auerbach (1982), Stock-Watson (1989), Engle-Watson (1980), (1981), Geweke (1977), Sargent-Sims (1977), Gourieroux-Monfort-Renault (1991)), et montrons qu'ils sont incompatibles avec les procédures d'agrégation. Ceci nous conduit naturellement à introduire des modèles à facteurs, où les coefficients sont stochastiques.

Dans le paragraphe 6, nous développons des tests de la condition de cohérence. Ces tests peuvent ou non utiliser les contraintes structurelles liées à un modèle d'évolution donné a priori

Finalement nous regardons, dans le paragraphe 7, si les divers résultats liés aux problèmes d'agrégation subsistent, lorsque les prix sont agrégés au moyen d'autres formules comme par exemple des indices de type Paasche.

II COMPORTEMENT DE LONG TERME DES PRIX

Nous nous intéressons à l'évolution jointe des prix de plusieurs biens. Ces biens sont repérés par l'indice ℓ, = 1,...L, et le prix du bien ℓ à la date t est noté $P_{\ell,t}$. Nous faisons dans la suite l'hypothèse suivante :

A.1 Le processus des évolutions relatives de prix :

$$\left\{\delta_{\ell,t} = \frac{P_{\ell,t}}{P_{\ell,t-1}},\ \ell=1,\ldots,L\right\}\ t=1,\ldots,T,\ldots$$

est fortement stationnaire.

Nous allons dans ce paragraphe examiner les implications de cette hypothèse sur le comportement asymptotique des niveaux de prix. Nous avons :

$$P_{\ell.t} = P_{\ell.o}\ \delta_{\ell.1}\ldots\delta_{\ell.t}.$$

Par passage au logarithme et introduction de la moyenne des logarithmes des accroissements :

(2.1) $$m_\ell = E \text{ Log } \delta_{\ell.t}.$$

nous en déduisons :

$$\text{Log } \frac{P_{\ell.t}}{P_{\ell.0}} = t\ m_\ell + \sum_{\tau=1}^{t} (\text{Log } (\delta_{\ell.\tau}) - m_\ell)$$

$$= t\ m_\ell + \sqrt{t}\ \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{\tau=1}^{t} (\text{Log } \delta_{\ell.\tau} - m_\ell).$$

Le processus $(\text{Log } \delta_{\ell.t},\ \ell=1,\ldots,L)$ $t = 1,\ldots$ étant stationnaire, nous pouvons (sous des conditions d'existence des moments d'ordre 4) appliquer le théorème central limite et donc approcher la loi de :

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{\tau=1}^{t} (\text{Log } \delta_{\ell.\tau} - m_\ell)\ ,\ \ell=1,\ldots,L\right\},$$

par une loi normale centrée, de matrice de variance-covariance :

(2.2) $$\Omega = V \text{ Log } \delta_t + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \text{Cov } (\text{ Log } \delta_t,\ \text{Log } \delta_{t-h}).$$

$$\text{avec } \delta_t = (\delta_{1.t},\ldots,\delta_{L.t})'.$$

Désignons par $U = (U_1,\ldots,U_L)'$ un vecteur gaussien de loi $N(0,\Omega)$, nous pouvons donc écrire asymptotiquement :

(2.3) $$P_{\ell.t} \simeq P_{\ell.o} \exp t\ m_\ell \exp \sqrt{t}\ U_\ell\ ,\ \ell=1,\ldots,L,$$

avec $U \sim N(o,\Omega)$, (où l'égalité n'est pas en terme de variables, mais est en terme de lois).

Nous constatons qu'asymptotiquement les prix comportent à la fois une tendance exponentielle déterministe $\exp t\ m_\ell$ et une tendance exponentielle stochastique $\exp \sqrt{t}\ U_\ell$. Nous raisonnons évidemment conditionnellement aux prix initiaux $P_{\ell.o}$, $\ell=1,\ldots,L$

En particulier utilisant les formules donnant les moments de la loi log-normale, nous obtenons les expressions limites des deux premiers moments du niveau de prix, conditionnels à $P_{\ell,o}$:

$$E\, P_{\ell,t} = P_{\ell,o} \exp t\, m_\ell \, E\left(\exp \sqrt{t}\, U_\ell\right).$$

$$E\, P_{\ell,t} = P_{\ell,o} \exp t\left(m_\ell + \frac{\omega_{\ell\ell}}{2}\right), \tag{2.4}$$

où $\omega_{\ell\ell} = V\, U_\ell$.

De même nous avons :

$$V\, P_{\ell,t} = P^2_{\ell,o} \exp\,(2\, tm_\ell)\, V\left(\exp \sqrt{t}\, U_\ell\right).$$

$$V\, P_{\ell,t} = P^2_{\ell,o} \exp(2\, tm_\ell) \exp t\, \omega_{\ell\ell}\, [\exp t\omega_{\ell\ell} - 1]. \tag{2.5}$$

et plus généralement :

$$\mathrm{Cov}\,(P_{k,t}, P_{\ell,t}) = P_{k,o}\, P_{\ell,o} \exp t(m_\ell + m_k) \exp \frac{t}{2}\,(\omega_{\ell\ell} + \omega_{kk})\, [\exp t\, \omega_{k\ell} - 1]. \tag{2.6}$$

Nous voyons donc que l'accroissement moyen des prix est de l'ordre de $\exp t\left(m_\ell + \frac{\omega_{\ell\ell}}{2}\right)$, c'est-à-dire fait intervenir un effet de variance, et que la variabilité est importante, puisque l'écart type, égal à :

$$[V\, P_{\ell,t}]^{1/2} = E\, P_{\ell,t}\, (\exp t\omega_{\ell\ell} - 1)^{1/2},$$

est d'un ordre de grandeur supérieur à la moyenne.

III EXPRESSION DE L'INDICE DE LASPEYRES DES PRIX

Il est classique de résumer l'évolution d'un tel ensemble de prix $(P_{\ell,t},\ \ell=1,\dots L)$ au moyen d'un indice agrégé de type Laspeyres. Notons o l'année de base de construction de l'indice, $q_{\ell,o}$ $\ell=1,\dots L$ les quantités de chaque bien à cette date. L'indice agrégé est défini par :

(3.1) $$I_t = \frac{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, p_{\ell,t}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, p_{\ell,o}}.$$

Il s'agit d'une moyenne des évolutions de prix désagrégées, pondérée par les coefficients budgétaires :

$$I_t = \sum_{\ell=1}^{L} \left(\frac{q_{\ell,o}\, p_{\ell,o}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, p_{\ell,o}} \right) \frac{p_{\ell,t}}{p_{\ell,o}}.$$

(3.2) $$I_t \sim \sum_{\ell=1}^{L} \left[\frac{q_{\ell,o}\, p_{\ell,o}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, p_{\ell,o}} \right] \exp\left(tm_\ell + \sqrt{t}\, U_\ell\right).$$

Nous constatons immédiatement que si $L \geq 2$, cette forme n'est pas du type $\exp(t\bar{m} + \sqrt{t}\, \bar{U})$, où $\bar{U}$ suivrait une loi normale, et que donc les évolutions relatives de l'indice ne peuvent être fortement stationnaires.

Il apparaît ainsi incompatible d'imposer à la fois la stationnarité forte des évolutions de prix à des niveaux agrégés et désagrégés.

Nous pouvons en fait donner plus de renseignements sur l'évolution de l'indice. Nous avons :

$$I_t / I_{t-1} = \sum_{\ell=1}^{L} \left[\frac{q_{\ell,o}\, p_{\ell,t-1}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o} p_{\ell,t-1}} \right] \frac{p_{\ell,t}}{p_{\ell,t-1}}.$$

Cette évolution apparaît comme une moyenne des évolutions relatives désagrégées $\delta_{\ell,t}$ $\ell=1,\ldots L$ avec des poids fonctions des quantités de la date o et des prix de la date t. Asymptotiquement (t grand, h fixé), nous pouvons écrire :

$$I_\tau/I_{\tau-1} = \sum_{\ell=1}^{L} \left[\frac{q_{\ell,o}\, P_{\ell,o}\, \dfrac{P_{\ell,\tau-1}}{P_{\ell,o}}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, P_{\ell,o}\, \dfrac{P_{\ell,\tau-1}}{P_{\ell,o}}} \right] \delta_{\ell,\tau}, \quad \tau = t-h,\dots,t,$$

$$(3.3) \quad I_\tau/I_{\tau-1} \sim \sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell,o}P_{\ell,o}\, \exp(tm_\ell + \sqrt{t}\, U_\ell)}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, P_{\ell,o}\, \exp\,(tm_\ell + \sqrt{t}\, U_\ell)}\, \delta_{\ell,\tau}, \quad \tau=t-h,\dots,t$$

où l'égalité est en terme de lois et où les variables gaussiennes U_ℓ $\ell=1,\dots L$ peuvent être considérées comme indépendantes des taux $\delta_{\ell,\tau}$, $\tau=t-h,\dots,t$, $\ell=1,\dots L$. On notera que cette indépendance ne peut être admise que pour une valeur h fixée ; en effet on sait que la variable U_ℓ a été introduite parce qu'ayant asymptotiquement même loi que $\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{\tau=1}^{t} (\text{Log}\, \delta_{\ell,\tau} - m_\ell)$, et cette dernière variable est fonction de $\delta_{\ell,\tau}$, $\tau = t-h,\dots t$. Ainsi l'approximation (3.3) ne pourra être utilisée pour développer des théorèmes asymptotiques, qu'au sens t <u>et</u> h tendant vers l'infini, avec pour h une vitesse d'explosion plus faible.

Dans l'expression (3.3) nous constatons que les poids sont fonctions du temps et aléatoires, avec un aléa indépendant des valeurs des taux. On notera cependant que les paramètres m_ℓ, Ω intervenant dans les poids sont liés aux paramètres de la loi des taux désagrégés.

IV <u>COHERENCE A LONG TERME DU SYSTEME DE PRIX</u>

IV.1 <u>Condition de cohérence</u>

Nous nous proposons dans ce paragraphe de comparer entre eux les divers taux de croissance des prix à long terme et d'introduire une contrainte nécessaire pour permettre l'existence des marchés pour t grand. Nous considérons pour la présentation le cas où les biens seraient des actifs financiers, échangeables sans coût et sans limite de découvert. L'indice de Laspeyres avec pour quantités les capitalisations correspond alors à l'indice de marché. A la date de base o, nous pouvons construire un portefeuille comportant uniquement des quantités d'actifs k et ℓ : α_k, α_ℓ, et autofinancé :

$$(4.1) \qquad \alpha_k\, P_{k,o} + \alpha_\ell\, P_{\ell,o} = o.$$

L'un de ces actifs est donc nécessairement acheté à découvert, c'est-à-dire l'un des α est négatif. Supposons $m_k < m_\ell$ et prenons un portefeuille autofinancé avec $\alpha_\ell > 0$, $\alpha_k < 0$. Si ce porfeuille n'est par remis à jour, sa valeur à la date t est :

$$(4.2) \qquad W_t = \alpha_k P_{k.t} + \alpha_\ell P_{\ell.t}$$
$$\sim \alpha_k P_{k.o} \exp(tm_k + \sqrt{t}\, U_k) + \alpha_\ell P_{\ell.o} \exp(tm_\ell + \sqrt{t}\, U_\ell).$$

Lorsque t tend vers l'infini le terme $\exp t\, m_\ell$ l'emporte et la valeur tend à être positive. Plus précisément, la probabilité :

$$P\,[W_t > 0]$$

$$= P\,[\alpha_k P_{k.o} \exp\,[tm_k + \sqrt{t}\, U_k] + \alpha_\ell P_{\ell.o} \exp\,[tm_\ell + \sqrt{t}\, U_\ell] > o]$$

$$= P\left[(U_\ell - U_k) > \frac{1}{\sqrt{t}} \text{Log}\left(-\frac{\alpha_k P_{k.o}}{\alpha_\ell P_{\ell.o}}\right) - \sqrt{t}\,(m_\ell - m_k)\right].$$

tend vers un lorsque t tend vers l'infini.

Ainsi disposant d'une somme nulle initialement, on pourrait asympotiquement s'assurer un gain strictement positif. Il y a donc une opportunité d'arbitrage asymptotique : les investisseurs se portent tous acheteurs de l'actifs ℓ, vendeurs de l'actif k, ce qui contredit l'existence même de ces marchés.

<u>Propriété 1</u> :

> Une condition d'absence d'opportunité d'arbitrage asymptotique est : $m_\ell = m$ indépendant de ℓ.

Lorsque cette condition est réalisée, nous avons $\lim\limits_{t \to \infty} P[W_t > o] = \frac{1}{2}$.

On notera que cette condition demande l'égalité des moyennes des $\text{Log}(P_{\ell.t} / P_{\ell.t-1})$ et non l'égalité des taux moyens $E(P_{\ell.t} / P_{\ell.t-1})$ ou celle des tendances déterministes des prix $\exp t(m_\ell + \omega_{\ell\ell}/2)$. Ces trois conditions seraient évidemment identiques dans le cas déterministe.

IV.2 <u>Discussion de la condition</u>

Cette interprétation en terme d'absence d'opportunité d'arbitrage asymptotique mérite en fait d'être regardée beaucoup plus attentivement. Elle peut en effet à première vue paraître incompatible avec des résultats classiquement utilisés en théorie financière et liés à l'hypothèse de marche aléatoire (voir e.g. Bachelier (1900), Fama (1965), (1976) pour des discussions de l'importance de cette hypothèse). Nous allons donc nous placer dans ce cadre particulier supposant que :

(4.3) les variables ($\delta_{\ell,t}$ $\ell = 1,.., L$) sont temporellement indépendantes, de moyenne $E\,\delta_{\ell,t} = 1$.

Dans ce cas nous avons :

$$\underset{t-1}{E}\, P_{\ell,t} = \underset{t-1}{E}\,(P_{\ell,t-1}\,\delta_{\ell,t}) = P_{\ell,t-1},\ \ell = 1,\dots,L,$$

c'est-à-dire les prix satisfont la condition de martingale, pour la probabilité historique.

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\underset{o}{E}\, W_t &= \underset{o}{E}\,(\alpha_k\, P_{k,t} + \alpha_\ell\, P_{\ell,t}) \\ &= \alpha_k\, \underset{o}{E}\, P_{k,t} + \alpha_\ell\, \underset{0}{E}\, P_{\ell,t} \\ &= \alpha_k\, P_{k,o} + \alpha_\ell\, P_{\ell,o} = o,\end{aligned}$$

à cause de la condition d'autofinancement (4.1).

Ainsi bien que le portefeuille autofinancé rapporte en moyenne un gain nul, il est possible, si $E \operatorname{Log} \delta_{\ell,t} > E \operatorname{Log} \delta_{k,t}$, qu'il soit asymptotiquement presque-sûrement gagnant. Il s'agit évidemment d'un des paradoxes usuels de la marche aléatoire. En pratique l'investisseur doit liquider son portefeuille à une date finie et ne peut utiliser l'opportunité d'arbitrage asymptotique.

Finalement nous allons donner une conséquence de la condition de la propriété 1 dans le cas où nous considérons un actif sans risque k de rendement r : $\frac{P_{k,t}}{P_{k,t-1}} = 1 + r$, et un actif risqué ℓ. De la condition :

$$m_k = E \log \delta_{k,t} = \log(1+r) = m_\ell = E \log \delta_{\ell,t},$$

nous déduisons par application de l'inégalité de convexité que :

$$E\,\delta_{\ell.t} = E \exp \log \delta_{\ell.t} > \exp E \log \delta_{\ell.t} = 1+r .$$

Ainsi la contrainte $m_k = m_\ell$ implique dans ce cas l'existence d'une prime de risque, dont l'importance dépend de la forme de la distribution des rendements. Si par exemple, nous supposons que les actifs risqués ont un rendement brut suivant une loi log-normale :

$$\text{Log } \delta_{\ell.t} \sim N(m_\ell,\ \omega_{\ell\ell}),$$

nous avons :

$$\begin{aligned} E\,\delta_{\ell.t} &= \exp\left(m_\ell + \frac{\omega_{\ell\ell}}{2}\right) \\ &= (1+r) \exp \frac{\omega_{\ell\ell}}{2} \text{ (sous la condition de cohérence).} \end{aligned}$$

On note que la prime de risque, qui pourrait être mesurée par : $E\,\delta_{\ell t}/(1+r) = \exp \frac{\omega_{\ell\ell}}{2}$, est directement liée à la variabilité de ces rendements.

IV.3 Evolution approchée de l'indice sous l'hypothèse de cohérence

Lorsque la condition de cohérence est imposée l'indice satisfait de façon approchée (voir 3.3) :

$$(4.4) \quad I_\tau / I_{\tau-1} \sim \sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell.o}\, p_{\ell.o} \exp \sqrt{t}\, U_\ell}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell.o}\, p_{\ell.o} \exp \sqrt{t}\, U_\ell}\, \delta_{\ell.\tau},\quad \tau = t-h,\dots,t$$

soit puisque t est grand :

$$(4.5) \quad I_\tau / I_{\tau-1} \sim \sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{1}(U_\ell > U_k,\ \forall k \neq \ell)\ \delta_{\ell.\tau},\quad \tau=t-h,\dots,t.$$

Ce résultat étend celui classique du cas déterministe, où le taux d'accroissement de long terme est égal au plus grand des taux d'accroissements désagrégés. Ici les taux désagrégés sont aléatoires et on retient le plus large, qui correspond à un bien d'indice lui même aléatoire.

L'approximation (4.5) n'est évidemment valable que pour t très grand. Pour des valeurs intermédiaires de t, on peut préferer l'approximation (4.4) , dans laquelle les poids dépendent de t et sont susceptibles de prendre toute valeur entre 0 et 1. A titre d'illustration considérons ces poids dans le cas L=2 . Le poids associé au premier bien vaut :

$$Z_1 = \frac{q_{1.o}\, P_{1.o} \exp \sqrt{t}\, U_1}{q_{1.o}\, P_{1.o} \exp \sqrt{t}\, U_1 + q_{2.o}\, P_{2.o} \exp \sqrt{t}\, U_2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{q_{2.o}\, P_{2.o}}{q_{1.o}\, P_{1.o}} \exp \sqrt{t}\, (U_2 - U_1)}.$$

La loi de ce coefficient admet donc pour fonction de répartition :

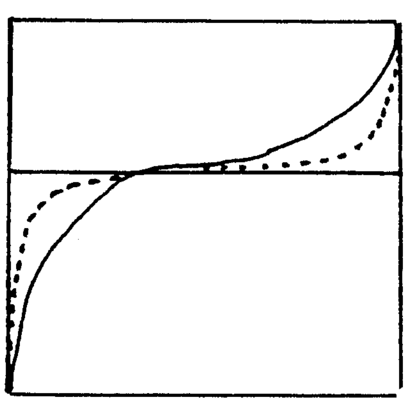
$$F_t(z) = P[Z_1 < z]$$

$$= P\left[U_1 - U_2 < \frac{1}{\sqrt{t}} \operatorname{Log} \left(\frac{q_{2.o}\, P_{2.o}}{q_{1.o}\, P_{1.o}} \frac{z}{1-z}\right)\right]$$

$$= \Phi\left[\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{(\omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{12})^{1/2}} \operatorname{Log} \left(\frac{q_{2.o}\, P_{2.o}}{q_{1.o}\, P_{1.o}} \frac{z}{1-z}\right)\right].$$

où Φ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. Ces diverses lois ont même médiane :
$\tilde{z} = q_{1.o}\, P_{1.o}(q_{1.o}\, P_{1.o} + q_{2.o}\, P_{2.o})^{-1}$, des densités infinies pour $z = 0$ et 1, et tendent vers le mélange équiprobable des masses ponctuelles en 0 et 1.

figure 4.6 : Fonctions de répartition du poids



V MODELES A FACTEURS A COEFFICIENTS ALEATOIRES

V.1 Les modèles usuels

L'évolution jointe de divers prix est souvent modélisée par l'intermédiaire de modèles à facteurs. Les formes linéaires à facteurs sont du type :

$$(5.1) \qquad \delta_{\ell.t} = \frac{P_{\ell.t}}{P_{\ell.t-1}} = \sum_{k=1}^{K} a_{\ell.k} F_{k.t} + \varepsilon_{\ell.t}, \quad = a_\ell' F_t + \varepsilon_{\ell.t},$$

où les processus sous-jacents $F_1, \dots, F_K, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_L$, sont généralement supposés fortement stationnaires et tels que :

(5.2) $\quad \varepsilon_t = (\varepsilon_{1.t}, \dots, \varepsilon_{L.t})'$ est un bruit blanc indépendant,

(5.3) les processus $F_1, \dots, F_K$ et les processus $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_L$ sont indépendants.

Les modifications de prix sont donc soumises à l'influence de facteurs sous-jacents $F_1, \dots, F_K$ communs à tous les biens et d'effets spécifiques (ou idiosyncratiques) ε_ℓ, $\ell=1,\dots,L$. Pour que cette distinction facteurs-effets spécifiques ait réellement un sens, il faut évidemment que les facteurs ne soient pas des bruits blancs, mais soient corrélés aux valeurs passées. Ainsi les facteurs résument tout l'effet du passé et c'est par leur intermédiaire que transite la dynamique du système (voir par exemple Diebold-Nerlove (1989), Engle-Ng-Rothschild (1989), Gourieroux-Monfort-Renault (1991)).

Les parts relatives des influences des facteurs et des termes idiosyncratiques dépendent évidemment des coefficients de sensibilité $a_{\ell.k}$, $\ell=1\dots L$, $k=1,\dots K$ et des importances relatives des facteurs et des termes spécifiques, mesurées par l'intermédiaire de leurs matrices de variance-covariance.

Si nous supposons satisfaite la condition de cohérence, qui ici fait intervenir les coefficients de sensibilité et les paramètres des lois d'évolution des facteurs et des termes spécifiques :

$$E \log \left(a_\ell' F_t + \varepsilon_{\ell.t}\right) = m_\ell \text{ indépendant de l'indice } \ell,$$

nous savons que l'indice agrégé vérifie au premier ordre (voir 4.5) :

$$I_\tau / I_{\tau-1} \sim \left(\sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{1}_{(U_\ell > U_k,\ \forall k \neq \ell)}\, a_\ell \right)' F_\tau + \left(\sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{1}_{(U_\ell > U_k,\ \forall k \neq \ell)}\, \varepsilon_{\ell,\tau} \right).$$

Il s'agit d'une représentation faisant intervenir les facteurs initiaux, mais qui en diffère par le fait que les coefficients de sensibilité apparaissent maintenant aléatoires. Nous voyons donc que les formulations à facteurs traditionnelles, avec des sensibilités déterministes, se révèlent incompatibles avec les procédures d'agrégation, même lorsqu'on ne tient compte que du seul effet au premier ordre.

On note par ailleurs que si les coefficients a_ℓ sont tous différents, le coefficient de sensibilité aléatoire associé à l'indice agrégé admet une loi qui charge un nombre de points égal au nombre de biens sous-jacents.

V.2 Modèles à facteurs à coefficients aléatoires

Les remarques précédentes conduisent à étendre les spécifications à facteurs traditionnelles pour les rendre compatibles de façon approchée avec les procédures d'agrégation. Pour cela il est utile d'introduire des formulations où les sensibilités et les variances résiduelles sont stochastiques :

$$(5.4) \qquad \underset{(L,1)}{\delta_t} = \underset{(L,K)}{a}\ \underset{(K,1)}{F_t} + \underset{(L,L)}{B}\ \underset{(L,1)}{\varepsilon_t},$$

où les processus (F_t), (ε_t) sont indépendants entre eux, et indépendants des matrices a et B de coefficients. On suppose toujours que (ε_t) est un bruit blanc réduit. Ces modèles étendent certains modèles à volatilité stochastique (Clark (1973) Hull-White (1987), Scott (1987), Duffie-Kan (1993)) en permettant aux sensibilités d'être également stochastiques. On vérifie facilement que le raisonnement, ayant permis de dériver les modèles approchés(4.4), (4.5) satisfaits par l'indice agrégé sous les conditions de cohérence reste encore valable pour ce type de formulation à facteurs, en faisant le raisonnement conditionnellement à a,B pour dériver les aléas auxiliaires U_ℓ. On en déduit que les modèles à facteurs (5.4) sont (asymptotiquement) compatibles avec les procédures d'agrégation par indices de Laspeyres. Par ailleurs si nous construisons des indices partiels relatifs à des sous-groupes de biens disjoints, les aléas U_ℓ intervenant dans les représentations satisfaites par ces sous-indices sont généralement corrélés. Si donc certains des prix observés sont en réalité des indices partiels de prix, il est naturel que les vecteurs de sensibilités a_ℓ $\ell=1,\dots,L$ puissent être corrélés.

On peut se demander dans quelle mesure l'introduction de l'aspect stochastique dans les sensibilités et les variances résiduelles modifie les propriétés de la dynamique. Explicitons pour cela les moments d'ordre 1 et 2 conditionnels au passé. Nous avons :

$$(5.5) \qquad \underset{t-1}{E}\ \delta_{\ell,t} = \underset{\theta}{E}\left(a_\ell'\right) \underset{t-1}{E} F_t \ ;$$

$$(5.6) \quad \begin{cases} \underset{t-1}{V}\ \delta_{\ell,t} & = \underset{\theta}{E}\left(a_\ell' \underset{t-1}{V} F_\ell\, a_\ell\right) + \underset{\theta}{E}\left(b_\ell' b_\ell\right) + \left(\underset{t-1}{E} F_t\right)' \underset{\theta}{V} a_\ell \left(\underset{t-1}{E} F_t\right), \\ \underset{t-1}{Cov}(\delta_{\ell,t}, \delta_{k,t}) & = \underset{\theta}{E}\left(a_\ell' \underset{t-1}{V} F_t a_k\right) + \underset{\theta}{E}\left(b_\ell' b_k\right) + \left(\underset{t-1}{E} F_t\right)' \underset{\theta}{Cov}(a_\ell, a_k) \left(\underset{t-1}{E} F_t\right), \end{cases}$$

où dans les expressions précédentes les espérances et variances indexées par θ : E_θ, V_θ, sont prises par rapport aux <u>seuls</u> coefficients aléatoires. Par ailleurs les autocovariances marginales sont :

$$(5.7) \quad Cov(\delta_{\ell,t}, \delta_{k,t-h}) = \underset{\theta}{E}\left[a_\ell' \, Cov(F_t, F_{t-h})\, a_k\right] + \left(EF_t\right)' \underset{\theta}{Cov}(a_\ell, a_k)\ (EF_t),$$

pour $h \neq o$.

Ces expressions appellent diverses remarques :

i) Si certaines combinaisons $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_L)'$ des taux $\beta' \delta_t$ permettent d'éliminer en moyenne la dynamique (lorsque $\beta' \underset{\theta}{E} a_\ell = 0$, $\forall \ell$, on a : $\underset{t-1}{E} (\beta' \delta_t) = o$), on voit qu'elles ne permettent pas de l'éliminer totalement, puisque $\beta' a_\ell$ en général stochastique n'est pas systématiquement nul.

Le modèle à sensibilité stochastique ne permet donc plus de construire des combinaisons permettant l'élimination de l'effet des facteurs. Cet effet ne peut être annulé qu'en moyenne.

ii) La volatilité des taux de modification de prix ne dépend pas uniquement de termes d'écart à la moyenne du type $\left(F_t - \underset{t-1}{E} F_t\right)^2$ $\left[\text{cachés dans } \underset{t-1}{V} F_t\right]$, ce qui est l'hypothèse des modèles ARCH à facteurs (Diebold-Nerlove (1989), Engle-Ng-Rothschild (1989)), mais elle dépend également des carrés des niveaux des variables (par l'intermédiaire de $\underset{t-1}{E} F_t \underset{\theta}{V} a_\ell \underset{t-1}{E} F_t'$), ce qui correspond plus aux hypothèses habituellement introduites dans les modèles en temps continu. On retrouve ici une discussion classique sur la modélisation de l'hétéroscédasticité conditionnelle (voir Sentana (1991), Bera-Lee (1992)).

iii) La forme des autocovariances montre par ailleurs une décomposition en deux termes : le premier qui tend vers zéro si le décalage h tend vers l'infini, ceci dès que le processus factoriel possède les propriétés de régularité usuelles. Le second terme est lui constant. Ainsi prenant la formule donnant les covariances marginales, nous voyons que $\lim_{h\to\infty} \mathrm{Cov}(\delta_{\ell,t}, \delta_{k,t-h}) = (E\, F_t)' \underset{\theta}{\mathrm{Cov}}\, (a_\ell, a_k)\, (E\, F_t)$, et le modèle comporte un effet de persistence si $(EF_t)' \underset{\theta}{\mathrm{Cov}}\, (a_\ell, a_k)\, E\, F_t \neq 0$ pour un couple ℓ, k.

En fait, il semble nécessaire vues les autocorrélations empiriques calculées sur données réelles, d'interdire un tel effet, c'est-à-dire de supposer que :

(5.8)
$$\left(a_\ell - \underset{\theta}{E}\, a_\ell\right)'\, E\, F_t = 0, \ \forall \ell.$$

Une formulation à facteurs compatible avec cette contrainte et permettant une analyse fine de modèles de marche aléatoire de prix serait par exemple :

(5.9)
$$\delta_t = e + a\, F_t + B\, \epsilon_t,$$

$$\text{avec } e = (1,\ldots,1)', \ \underset{t-1}{E}\, F_t = 0.$$

Pour ce modèle spécifique, on aurait :

(5.10)
$$\begin{cases} \underset{t-1}{E}\, \delta_{\ell,t} = 1, \\ \underset{t-1}{\mathrm{Cov}}\, (\delta_{\ell,t}, \delta_{k,t}) = \underset{\theta}{E}\left(a_\ell' \underset{t-1}{V} F_t\, a_k\right) + \underset{\theta}{E}\left(b_\ell' b_k\right), \\ \mathrm{Cov}\, (\delta_{\ell,t}, \delta_{k,t-h}) = 0, \quad \forall h \neq 0. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une spécification adaptée à l'étude des volatilités et covolatilités dont la dynamique transite par celle des facteurs.

Comme : $\underset{t-1}{\mathrm{Cov}}\, (\delta_{\ell,t}, \delta_{k,t}) = \mathrm{Tr}\left\{\underset{t-1}{V} F_t\, \underset{\theta}{E}\left(a_\ell' a_k\right)\right\} + \underset{\theta}{E}\, \left(b_\ell' b_k\right)$,

où Tr désigne l'opérateur trace, on voit par exemple que l'hétéroscédasticité conditionnelle des taux δ_ℓ dépend de façon directe du nombre de facteurs présentant des variances ou des covariances fonctions du passé.

iv) Finalement il nous faut étudier l'effet de kurtosis. On sait en effet qu'il y a accroissement des queues de distributions par agrégation temporelle, dans le cas de modèles conditionnellement hétéroscédastiques (voir Engle (1982)), mais les applications montrent que l'introduction d'une telle hétéroscédasticité conditionnelle ne suffit généralement pas à expliquer toute l'importance de l'effet leptokurtique. Cet effet résiduel ne pourrait-il pas être dû à l'oubli du caractère stochastique des coefficients ? Nous regarderons ce point sur un exemple. Supposons que,

$\delta_{\ell.t} = 1 + a_\ell F_t$, où K=1, et où le facteur F_t est conditionnellement gaussien centré. Nous avons :

$$\underset{t-1}{E}\ \delta_{\ell.t} = 1, \quad \underset{t-1}{V}\ \delta_{\ell.t} = \underset{t-1}{V}\ (a_\ell F_t) = \underset{\theta}{E}\ a_\ell^2 \ \underset{t-1}{V}\ F_t .$$

$$\underset{t-1}{E}\left(\delta_{\ell.t} - \underset{t-1}{E}\ \delta_{\ell.t}\right)^4 = \underset{t-1}{E}\left(a_\ell^4 F_t^4\right) = \underset{\theta}{E}\ a_\ell^4 \ \underset{t-1}{E}\ F_t^4 = 3 \underset{\theta}{E}\ a_\ell^4 \left(\underset{t-1}{V}\ F_t\right)^2 .$$

Nous en déduisons que la kurtosis conditionnelle des taux d'évolution est :

$$k(\delta_{\ell.t}) = \frac{\underset{t-1}{E}\left(\delta_{\ell.t} - \underset{t-1}{E}\ \delta_{\ell.t}\right)^4}{\left(\underset{t-1}{V}\ \delta_{\ell.t}\right)^2} = 3\ \frac{\underset{\theta}{E}\ a_\ell^4}{\left(\underset{\theta}{E}\ a_\ell^2\right)^2},$$

et on vérifie immédiatement, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que dès que le coefficient a_ℓ est stochastique, la loi conditionnelle du taux d'évolution à une kurtosis supérieure à 3 et admet des queues plus épaisses que celles de la loi normale.

VI TESTS DES CONDITIONS DE COHERENCE

Nous avons explicité dans le paragraphe IV les conditions de cohérence correspondant à l'absence d'opportunité d'arbitrage asymptotique. Ces conditions peuvent en pratique être testées soit directement, soit dans le cadre d'un modèle.

VI I) Test direct

L'idée la plus naturelle est de construire un test à partir des statistiques :

$$(6.1) \quad \hat{m}_\ell = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \text{Log } \delta_{\ell,t} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \text{Log } \frac{P_{\ell,t}}{P_{\ell,t-1}} = \frac{1}{T} \text{Log } \frac{P_{\ell,T}}{P_{\ell,o}}, \quad \ell=1,\dots T.$$

Il s'agit donc de comparer pour les divers biens les rendements sur longue période et non les moyennes des rendements annuels (qui seraient $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \frac{P_{\ell,t}}{P_{\ell,t-1}}$).

A cause de l'hypothèse de stationnarité, on sait que pour T grand, ces statistiques sont asymptotiquement normales :

$$(6.2) \qquad \sqrt{T} \left[\begin{pmatrix} \hat{m}_1 \\ \vdots \\ \hat{m}_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_L \end{pmatrix} \right] \xrightarrow{d} N(o,\Omega),$$

où la matrice Ω est donnée en (2.2). Cette matrice peut facilement être estimée de façon convergente en tronquant la somme et en remplaçant les covariances théoriques par leurs contreparties empiriques. Nous notons $\hat{\Omega}$ un tel estimateur. Nous sommes alors ramenés à un problème classique. Etant donné un modèle :

$$\hat{m}_\ell = m_\ell + v_\ell, \ \ell = 1,\dots,L,$$

avec : $v = (v_1,\dots, v_L)' \sim N\left(0 \ , \frac{1}{T} \hat{\Omega}\right)$,

tester l'hypothèse : $H_0 = \{\exists \ m : m_\ell = m, \ \forall \ell\}$.

Pour cela on estime le paramètre contraint, c'est-à-dire on considère le modèle sous l'hypothèse nulle H_0:

$$\hat{m}_\ell = m + v_\ell, \ \ell = 1,\dots,L.$$

L'estimateur contraint de la valeur commune est :

$$(6.3) \qquad \hat{m}_0 = (e' \hat{\Omega}^{-1} e)^{-1} e' \hat{\Omega}^{-1} \hat{m},$$

avec : $\hat{m} = \left(\hat{m}_1,\dots,\hat{m}_L\right)'$ et $e = (1,\dots,1)'$.

On calcule alors la statistique du rapport des maxima de vraisemblance, dont l'expression est :

$$(6.4) \qquad \xi_{R.M.V} = (\hat{m} - \hat{m}_0\, e)'\, \hat{\Omega}^{-1}\, (\hat{m} - \hat{m}_0\, e).$$

et dont la loi limite sous l'hypothèse nulle est une loi du khi-deux à L-1 degrès de liberté. Soit $\chi^2_{95\,\%}$ (L-1) le quantile à 95 % associé à cette loi. On accepte la condition de cohérence si $\xi_{RMV} < \chi^2_{95\,\%}$ (L-1), on la refuse sinon.

Notons que dans le cas de rejet de l'hypothèse, on peut déterminer les biens qui expliquent le rejet et ceux pour lesquels l'hypothèse est approximativement satisfaite. Pour ce dernier groupe de biens, on peut donc effectuer des agrégations partielles en restant compatible avec les spécifications à facteurs. Dans l'interprétation financière développée dans le paragraphe IV.2, les actifs expliquant le rejet sont ceux pour lesquels on peut espérer une opportunité d'arbitrage asymptotique.

VI.2 Test indirects

La méthode précédente n'utilise pas la forme paramétrée de la dynamique, et le test pourrait être rendu plus puissant en prenant en compte cette structure. Il faudrait alors expliquer comment les moyennes m_ℓ s'expriment en fonction des paramètres du modèle, c'est-à-dire des lois des facteurs, des erreurs et des coefficients de sensibilité, puis tester l'égalité de ces fonctions. Cette démarche plus puissante apparaît cependant délicate à mettre en oeuvre en particulier parce que le calcul de la fonction fait intervenir des intégrations non résolubles analytiquement pour déterminer les lois marginales des facteurs et pour marginaliser par rapport aux valeurs non observées de ces facteurs. L'existence de ces intégrales obligerait alors à utiliser des approximations par simulation, ou des développements en série. A titre d'exemple, considérons le modèle à un facteur :

$$\delta_{\ell,t} = 1 + a_\ell\, F_t + b_\ell\, \epsilon_t, \quad \ell=1,\dots,L,$$

où (F_t) et (ϵ_t) sont indépendants, et admettent des moments de tous ordres. Nous avons (lorsque les séries introduites existent) :

$$\begin{aligned} E \operatorname{Log} \delta_{\ell,t} &= E \operatorname{Log} (1 + a_\ell\, F_t + b_\ell\, \epsilon_t) \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p}\, E\left[(a_\ell\, F_t + b_\ell\, \epsilon_t)^p\right] \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \sum_{j=0}^{p} C_p^j\, a_\ell^j\, b_\ell^{p-j}\, E\left(F_t^j\, \epsilon_t^{p-j}\right). \end{aligned}$$

Notons $\mu_j = E(F_t^j)$, $\nu_j = E(\epsilon_t^j)$ les moments d'ordre j des deux variables. A cause de l'hypothèse d'indépendance, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} E \operatorname{Log} \delta_{\ell,t} &= m_\ell \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \sum_{j=o}^{p} C_p^j \, a_\ell^j \, b_\ell^{p-j} \, \mu_j \, \nu_{p-j} . \end{aligned}$$

Cette série ne peut avoir de forme simple que pour des lois très particulières des variables F_t et ϵ_t. Si par exemple F_t et ϵ_t suivent des lois log-normales : $f_t = \operatorname{Log} F_t \sim N[o,\sigma^2]$, $e_t = \operatorname{Log} \epsilon_t \sim N[o,\eta^2]$,

nous avons :

$$m_\ell = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \sum_{j=o}^{p} C_p^j \, a_\ell^j \, b_\ell^{p-j} \exp \frac{\sigma^2 \, j^2}{2} \exp \frac{\eta^2 \, (p-j)^2}{2}.$$

VII AUTRES FORMULES D'AGREGATION

Le problème de l'agrégation de dynamiques de prix a dans les paragraphes précédents été examiné, lorsque le prix agrégé du groupe de biens était calculé au moyen d'un indice de Laspeyres. Bien qu'il s'agisse du mode d'agrégation usuel, d'autres indices agrégés pourraient être introduits : indices de Paasche, indices chainé, indice de Fisher... (voir e.g Diewert (1978), (1981)). Nous nous proposons ici de reprendre la démarche développée dans les paragraphes III et IV pour voir, si elle dépend ou non fortement de l'indice retenu. Nous le ferons pour l'indice de Paasche.

VII.1. Expression de l'indice de Paasche des prix

Cet indice est calculé en pondérant par les quantités de la date présente, et non par celles de la date de base. Il vaut :

$$J_t = \frac{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,t} \, p_{\ell,t}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,t} \, p_{\ell,o}}. \qquad (7.1)$$

La modification de l'indice entre deux dates consécutives est alors :

$$J_t \;/\; J_{t-1} = \frac{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,t}\, P_{\ell,t}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,t}\, P_{\ell,o}} \; \frac{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,t-1}\, P_{\ell,o}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,t-1}\, P_{\ell,t-1}}.$$

$$= \sum_{\ell=1}^{L} \left(\frac{q_{\ell,t-1}\, P_{\ell,t-1}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,t-1}\, P_{\ell,t-1}} \right) \frac{q_{\ell,t}\, P_{\ell,t}}{q_{\ell,t-1}\, P_{\ell,t-1}}$$

$$\left[\sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell,t-1}\, P_{\ell,o}}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,t-1}\, P_{\ell,o}} \; \frac{q_{\ell,t}}{q_{\ell,t-1}} \right]^{-1}.$$

Rechercher une formule approchée pour cette évolution va donc nécessiter la prise en compte non seulement de l'évolution des prix, mais aussi de l'évolution des quantités. Supposons que ces deux types d'évolutions :

$$(7.2) \qquad \begin{cases} \delta_{\ell,t} = P_{\ell,t} / P_{\ell,t-1}, \\ \delta^*_{\ell,t} = q_{\ell,t} / q_{\ell,t-1}, \end{cases}$$

soient fortement stationnaires. Introduisons les moments des logarithmes de ces accroissements :

$$(7.3) \qquad \begin{cases} E \operatorname{Log} \delta_t = m, \\ E \operatorname{Log} \delta^*_t = m^*, \\ V \begin{bmatrix} \operatorname{Log} \delta_t \\ \operatorname{Log} \delta^*_t \end{bmatrix} = \tilde{\Omega}, \end{cases}$$

où $\operatorname{Log} \delta_t$ est une notation pour le vecteur $[\operatorname{Log} \delta_{1t}, \dots, \operatorname{Log} \delta_{Lt}]'$. Désignant par $\begin{bmatrix} U \\ U^* \end{bmatrix}$ un vecteur gaussien de dimension 2L, centré, de matrice de variance-covariance $\tilde{\Omega}$, nous voyons qu'un raisonnement similaire à celui fait pour établir l'équation (2.3) donne :

$$(7.4) \qquad \begin{cases} p_{\ell.t} \simeq p_{\ell.o} \exp t\, m_\ell \exp \sqrt{t}\, U_\ell. \\ q_{\ell.t} \simeq q_{\ell.o} \exp t\, m_\ell^* \exp \sqrt{t}\, U_\ell^*. \end{cases}$$

Nous en déduisons que l'évolution de l'indice de Laspeyres est, pour t grand, telle que :

$$(7.5) \quad J_t/J_{t-1} = \sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell.o}\, p_{\ell.o} \exp t\, (m_\ell + m_\ell^*) \exp \sqrt{t}\, (U_\ell + U_\ell^*)}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell.o}\, p_{\ell.o} \exp t\, (m_\ell + m_\ell^*) \exp \sqrt{t}\, (U_\ell + U_\ell^*)}\, \delta_{\ell.t}^*\, \delta_{\ell.t}$$

$$\left[\sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell.o}\, p_{\ell.o} \exp t\; m_\ell^* \exp \sqrt{t}\, U_\ell}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell.o}\, p_{\ell.o} \exp t\, m_\ell^* \exp \sqrt{t}\, (U_\ell^*)}\, \delta_{\ell t}^* \right]^{-1}.$$

VII.2 Discussion de l'évolution de l'indice

La formule précédente diffère sensiblement de celle, qui avait été obtenue avec l'indice de Laspeyres, essentiellement parce qu'elle dépend des évolutions asymptotiques et instantanées des quantités.

i) La stationnarité de l'évolution de l'indice ne sera assurée que si une condition de cohérence est satisfaite simultanément pour les prix et pour les quantités :

$$(7.6) \qquad \text{et} \qquad \begin{matrix} m_\ell = m, & \text{indépendant de } \ell, \\ m_\ell^* = m^*, & \text{indépendant de } \ell. \end{matrix}$$

Pour interpréter une telle condition jointe, il faut se souvenir que prix et quantités sont généralement liés. Supposons par exemple des marchés en équilibre et des demandes résultant de maximisation de fonction d'utilité de type Stone-Geary. Nous aurions :

$$p_{\ell.t}\, q_{\ell.t} = \alpha_\ell\, R_t.$$

où R_t désigne le revenu et où les α_ℓ sont les coefficients budgétaires, des coefficients positifs, sommant à 1. Nous aurions donc :

$$\text{(7.7)} \qquad \text{Log } \delta^*_{\ell.t} = -\text{Log } \delta_{\ell t} + \text{Log } \frac{R_t}{R_{t-1}}.$$

Nous voyons donc que si Log $\frac{R_t}{R_{t-1}}$ est aussi stationnaire :

$$m^*_\ell = - m_\ell + E \text{ Log } \frac{R_t}{R_{t-1}}.$$

La contrainte de cohérence sur les prix entraine automatiquement la contrainte de cohérence sur les quantités, et inversement. Ainsi la condition (7.6) apparaît peu différente de celle mise en évidence pour l'indice de Laspeyres.

ii) Lorsque cette condition de cohérence (7.6) est satisfaite, nous avons :

$$\text{(7.8)} \qquad J_t \;/\; J_{t-1} = \left[\sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell.o}\, P_{\ell.o} \exp \sqrt{t}\, (U_\ell + U^*_\ell)}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell.o}\, P_{\ell.o} \exp \sqrt{t}\, (U_\ell + U^*_\ell)} \delta^*_{\ell.t}\, \delta_{\ell.t} \right]$$

$$\left[\sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell.o}\, P_{\ell.o} \exp \sqrt{t}\, U^*_\ell}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell.o}\, P_{\ell.o} \exp \sqrt{t}\, U^*_\ell} \delta^*_{\ell.t} \right]^{-1}.$$

Il s'agit d'une combinaison des évolutions désagrégées de prix $\delta_{\ell.t}$, avec des coefficients aléatoires. Contrairement à ce que nous avions vu avec l'indice de Laspeyres, on note que ces coefficients ne somment pas à un, et surtout qu'ils dépendent des variables présentes $\delta^*_{\ell t}$ et sont de ce fait généralement corrélés avec les $\delta_{\ell t}$.

iii) Si par exemple les taux $\delta_{\ell.t}$ $\ell=1,\ldots L$ satisfont un modèle linéaire à facteurs, où toute la dynamique transite par les facteurs, l'évolution de l'indice de Paasche a une dynamique qui ne dépend pas uniquement des facteurs influant sur les prix, mais aussi de ceux pour l'instant non spécifiés qui influent sur les quantités. On remarque ainsi que si prix <u>et</u> quantités satisfont des modèles linéaires à facteurs, l'évolution $J_t \;/\; J_{t-1}$ satisfait un modèle à facteurs non linéaire. Ainsi il ne suffit pas d'élargir la classe des modèles linéaires à facteurs en introduisant des coefficients stochastiques pour inclure les évolutions agrégées par Paasche.

Pour résumer il apparaît que si on trouve importantes les formulations linéaires à facteurs pour les dynamiques de prix, il est préférable d'effectuer les agrégations par l'intermédiaire de procédures, qui, comme l'indice de Laspeyres, introduisent des poids fonctions de l'année de base.

iv) Finalement il est intéressant de regarder plus en détail la forme de l'évolution de l'indice de Paasche lorsque prix et quantités sont liés par l'intermédaire de la formule (7.7). Notons $r_t = \log (R_t/R_{t-1})$. Nous avons

$$\text{Log } \delta^*_{\ell,t} = - \text{Log } \delta_{\ell,t} + r_t .$$

donc :

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{\delta=1}^{t} \left(\text{Log } \delta^*_{\ell,\tau} - m^*_\ell\right) = -\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{\tau=1}^{t} (\text{Log } \delta_{\ell,\tau} - m_\ell) + \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{\tau=1}^{t} \left(r_\tau - \bar{r}\right),$$

en notant $\bar{r}$ l'espérance de r_τ. Introduisant les variables asymptotiques, nous en déduisons que :

$$U^*_\ell = - U_\ell + V.$$

Remplaçant dans l'expression de l'évolution de l'indice, nous avons :

$$J_t \;/\; J_{t-1} = \left[\sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell,o}\, P_{\ell,o} \exp \sqrt{t}\, V}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, P_{\ell,o} \exp \sqrt{t}\, V} \exp r_t\right]$$

$$\left[\sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell,o}\, P_{\ell,o} \exp \sqrt{t}\ (-U_\ell + V)}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, P_{\ell,o} \exp \sqrt{t}\ (-U_\ell + V)} \ \frac{\exp r_t}{\delta_{\ell,t}}\right]^{-1} .$$

$$J_t \;/\; J_{t-1} = \left[\sum_{\ell=1}^{L} \frac{q_{\ell,o}\, P_{\ell,o} \exp -\sqrt{t}\, U_\ell}{\sum_{\ell=1}^{L} q_{\ell,o}\, P_{\ell,o} \exp -\sqrt{t}\, U_\ell} \ \frac{1}{\delta_{\ell,t}}\right]^{-1} .$$

Ce rapport apparaît comme une moyenne harmonique de prix avec des poids ayant même loi que celle des poids de l'indice de Laspeyres, puisque la loi du vecteur U est symétrique. On conçoit donc qu'avec la liaison

(7.7) entre prix et quantités, les évolutions constatées entre les deux indices restent proches, même asymptotiquement, la moyenne $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} J_t / J_{t-1}$ correspondant à l'indice Paasche étant plus faible que celle $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_t / I_{t-1}$ correspondant à l'indice de Laspeyres. Il faut ici insister sur cette propriété. En effet il est classique de noter que l'indice de Laspeyres I_t est plus large que l'indice de Paasche J_t, et de remarquer qu'en pratique cet effet disparaît lorsqu'on passe aux accroissements entre deux dates successives, c'est-à-dire lorsqu'on compare I_t / I_{t-1} et J_t / J_{t-1}. En fait nous venons de voir dans notre exemple que cette idée sur les valeurs comparées des accroissements est erronée.

VIII.3 Comparaisons des indices par simulation

Afin de préciser cette comparaison asymptotique des indices, nous donnons dans ce paragraphe divers résultats de simulations, dont la portée est celle classique et limitée de telles études.

1) Un modèle d'évolution de prix à un facteur et liens forts entre évolutions de prix et de quantités

Dans ce premier exemple nous considérons un modèle à un facteur pour les évolutions de prix, facteur suivant en logarithme une formulation autorégressive :

$$(7.9) \qquad \begin{cases} \delta_{\ell,t} = 1 + a_\ell \exp f_t + b_\ell \exp e_{\ell,t}, \ \ell=1,\dots,10, \\ f_t = c\, f_{t-1} + d\eta_t . \end{cases}$$

et supposons les évolutions de quantité telles que :

$$(7.10) \qquad \begin{cases} \delta^*_{\ell,t} = \dfrac{\exp r_t}{\delta_{\ell,t}}, \\ \text{avec} \ : r_t = \alpha\, r_{t-1} + \beta\, \nu_t . \end{cases}$$

$(e_{1,t}),\dots,(e_{10,t}),\ (\eta_t),\ (\nu_t)$ sont des bruits blancs gaussiens, centrés, réduits indépendants, et les valeurs des paramètres sont fixées de façon à satisfaire approximativement les conditions de cohérence :

a_ℓ	0.002	0.002	0.004	0.004	0.006	0.006	0.008	0.008	0.005	0.005
b_ℓ	0.008	0.008	0.006	0.006	0.004	0.004	0.002	0.002	0.005	0.005

$c = d = 0.7$; $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.001$. Le nombre d'obervations a été pris égal à 200, et les valeurs initiales des variables sont $f_0 = r_0 = o$, $q_{\ell,o} = P_{\ell,o} = 1$. Les évolutions observées des deux indices sont très proches, ceci étant dû a la fois au modèle unifacteur pour les prix et aux interprétations analogues des deux indices. Les moyennes des accroissements sont :

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_t \; / \; I_{t-1} = 1.0157 > \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} J_t \; / \; J_{t-1} = 1.0155.$$

ce qui est compatible avec le résultat établi au sous-paragraphe précédent.

2) <u>Un modèle à un seul facteur commun aux évolutions de prix et de quantité</u>

L'exemple précédent comportait en fait deux facteurs (f_t) et (r_t), même si le second facteur apparaît avoir peu d'influence sur les évolutions des deux indices. Nous allons maintenant considérer un exemple où prix et quantités dépendent d'un seul facteur f_t. Comme nous l'avons remarqué précédemment, si la dynamique des prix est linéaire dans ce facteur, il en est de même asymptotiquement de celle de l'indice de Laspeyres, mais des non linéarités s'introduisent pour l'indice de Paasche. C'est cet effet que nous illustrons ici. Le modèle comporte le sous-système (7.9), complété par :

(7.11) $\delta^*_{\ell,t} = 1 + a^*_\ell \exp f_t + b^*_\ell \exp e_{\ell,t}$, $\ell=1,\ldots,10$,

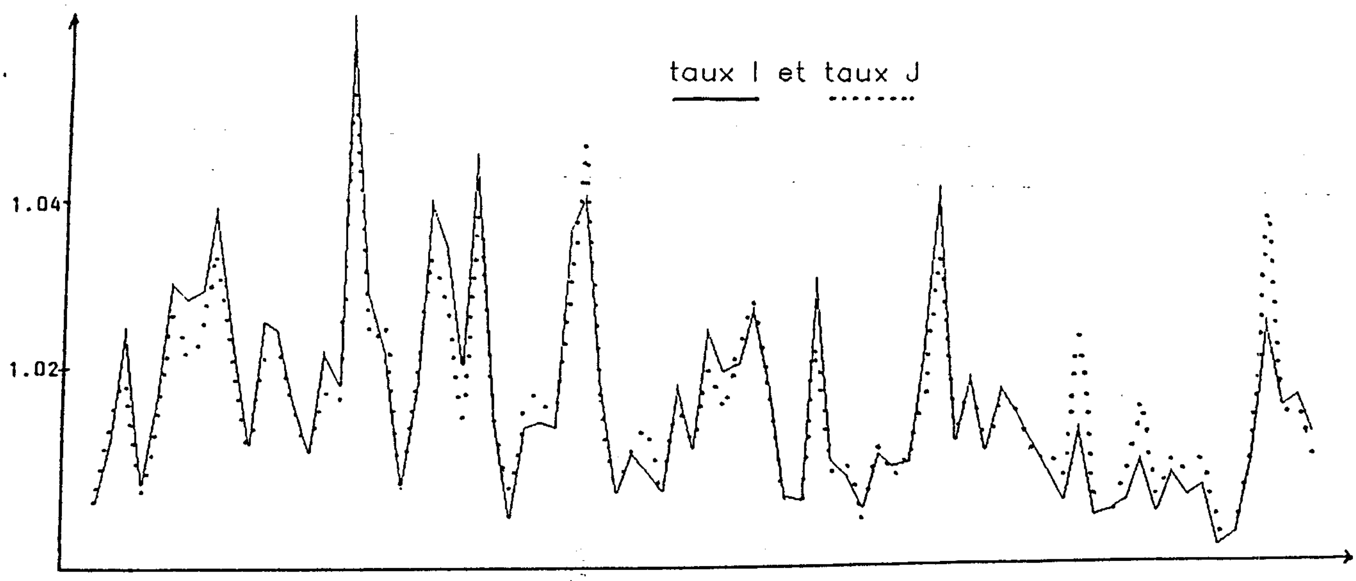
où les coefficients sont donnés par :

a^*_ℓ	0	0.001	0.001	0.001	-0.001	-0.1	-0.7	-0.7	0	0
b^*_ℓ	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.002

On a introduit des sensibilités négatives des quantités au facteur.

lorsque celles relatives au prix étaient grandes. L'idée est qu'une augmentation forte du facteur influe plus sur les prix des biens pour lesquels a_ℓ est grand et que, corrélativement, il devient y avoir baisse des quantités. Nous donnons ci-dessous les graphiques d'évolutions de I_t / I_{t-1}, J_t / J_{t-1} montrant les différences subsistant à long terme.

Figure 7.12 : Evolutions des deux indices



3) Un modèle à deux facteurs

Le dernier exemple a un caractère plus général, car nous y introduisons plusieurs facteurs, deux pour simplifier. Les dynamiques sont résumées par :

$$(7.13)\quad \begin{cases} \delta_{\ell,t} = 1 + a_{\ell,1} \exp f_{1,t} + a_{\ell,2} \exp f_{2,t} + b_\ell \exp e_{\ell,t}, \\ \delta^*_{\ell,t} = 1 + a^*_{\ell,1} \exp f_{1,t} + a^*_{\ell,2} \exp f_{2,t} + b^*_\ell \exp e_{\ell,t}, \\ f_{1,t} = c_1\ f_{1,t-1} + d_1\ \eta_{1,t}, \\ f_{2,t} = c_2\ f_{2,t-1} + d_2\ \eta_{2,t}, \end{cases}$$

avec des bruits gaussiens, centrés réduits, indépendants, et des coefficients donnés par :

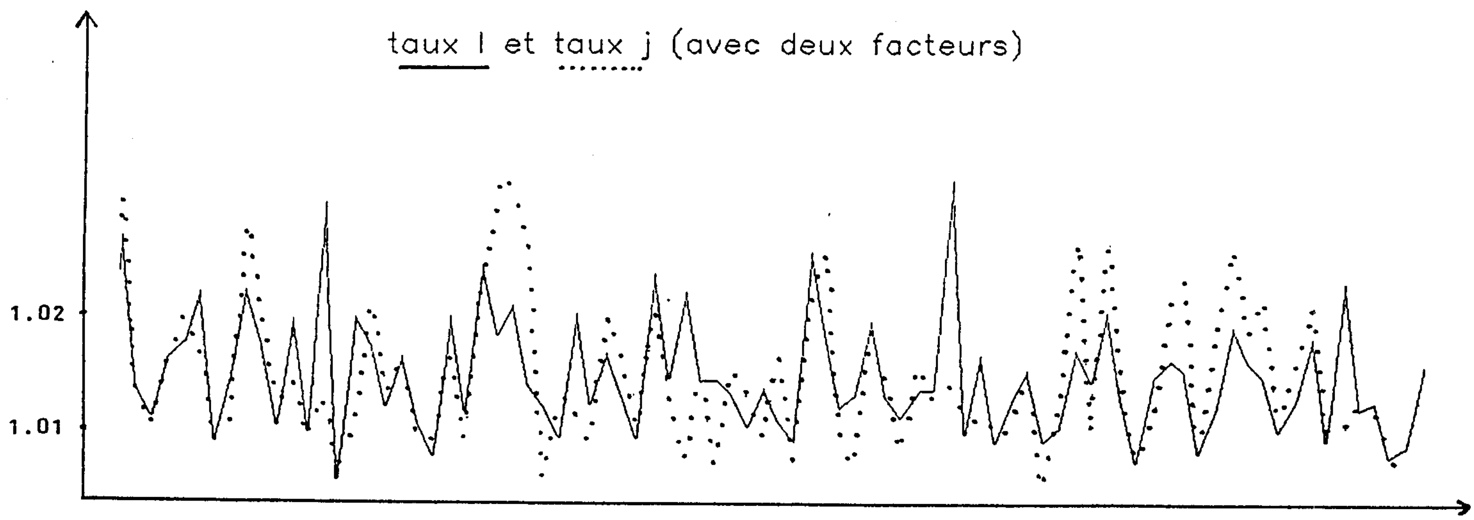
$C_1 = 0.01,\ C_2 = -0.8$
$d_1 = d_2 = 0.7$;

$a_{\ell,1}$	0.002	0	0.004	0	0.006	0	0.008	0	0.005	0
$a_{\ell,2}$	0	0.002	0	0.004	0	0.006	0	0.008	0	0.005
b_{ℓ}	0	0.008	0.006	0.006	0.004	0.004	0.002	0.002	0.005	0.005
$a^*_{\ell,1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a^*_{\ell,2}$	0	-0.4	0	-0.4	0	-0.8	0	-0.9	0	-0.7
b^*_{ℓ}	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.002	0.001	0.002

Les facteurs ont des évolutions sensiblement différentes puisque le second d'entre eux a un coefficient autorégressif fortement négatif induisant des pseudo-périodicités.

Par construction et choix des coefficients l'indice de Laspeyres va prendre en compte les effets dus aux deux facteurs, alors que l'indice de Paasche va pondérer plus le premier facteur (La croissance du second et son effet sur les prix étant contrebalancées par les évolutions "symétriques" des quantités). On voit ainsi que contruire deux indices est ici une façon de résumer sans trop de perte d'information les deux évolutions factorielles sous-jacentes. Evidemment lorsque le nombre de facteurs sous-jacents croît, deux indices peuvent de nouveau se révèler insuffisants pour résumer de façon adéquate la dynamique. Nous donnons ci-dessous une simulation des évolutions des deux indices :

figure 7.14 : Evolution des deux indices



REFERENCES

Auerbach, A (1982) : The Index of Leading Indicators : Measurement Without Theory, Thirty Five Years Later", Review of Economics and Statistics, 64, 589-595.

Bachelier, L (1900) : "Theory of Speculation", reproduit dans P. Cootner, ed., 1964 , "The Random Character of Stock Market Prices", p17-78, MIT Press.

Bera, A., et S., Lee (1992) : "Information Matrix Test, Parameter Heterogeneity and ARCH : A Synthesis", Review of Economic Studies

Blackorby, C., et D., Primont (1980) : "Index Numbers and Consistency in Aggregation", Journal of Economic Theory, 22, 87-98.

Clark, P (1973) : A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Process", Econometrica, 41, 135-155.

Diebold, F., et M., Nerlove (1989) : "The Dynamic of Exchange Rate Volatility : A Multivariate Latent Factor ARCH Model", Journal of Applied Econometrics, 4, 1-22

Diewert, W. (1978) : "Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation", Econometrica, 46, 883-900

Diewert, W. (1981) : "The Economic Theory of Index Numbers : A Survey", dans "The Theory and Measurement of Consumer Behaviour", Ed. A. Deaton, Cambridge Univ. Press

Duffie, D., et R., Kan (1993) : "A Yield Factor Model of Interest Rates", Stanford D.P.

Engle, R., et M., Watson (1980) : "Formulation Générale et Estimation de Modèles Multidimensionnels Temporels à Facteurs Explicatifs Non Observables", Cahier du Séminaire d'Econométrie, 22, 109-125

Engle, R., et M., Watson (1981) : "A One Factor Multivariate Time Series

Model of Metropolitan Wage Rates", Journal of the American Statistical association, 76, 774-781

Engle, R.F. (1982) : "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", Econometrica, 50, 987-1008.

Engle, R., Ng, V. et M., Rothschild (1989) : "Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure : Empirical Estimates for Treasury Bills",

Fama, E (1965) : "The Behaviour of Stock Market Prices", Journal of Business, 38, 34-105

Fama, E (1976) : "Foundations of Finance", Basil Blackwell, Oxford.

Fisher, I (1922) : "The Making of Index Numbers", Boston Mass, Houghton Mifflin

Frisch, R. (1936) : "Annual Survey of General Economic Theory : The Problem of Index Numbers", Econometrica, 4, 1-39

Geweke, J. (1977) : "The Dynamic Factor Analysis of Economic Time Series Models", dans D. Aigner et A. Golberger, Ed., "Latent Variables in Socio Economic Models", North-Holland.

Gourieroux, c., Monfort, A., et E., Renault (1991) : "A General Framework for Factor Models", CREST DP 91.06

Hull, J., A., White (1987) : "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", The Journal of Finance, 3, 281-300.

Konus, A. (1939) : "The Problem of the True Index of the Cost of Living", Econometrica, 7, 10-29

Koopmans, F. (1947) : "Measurement Without Theory", Review of Economics and Statistics, 27, 161-172.

Sargent, T., et C., Sims (1977) "Business Cycle Modeling without Pretending to Have Too Much A Priori Economic Theory", dans, "New Methods in Business Cycles Research", Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Scott, L. (1987) : "Option Pricing When the Variance Changes Randomly : Theory, Estimation and Application", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, 419-438

Sentana, E (1991) : "Quadratic ARCH Models : A Potential Reinterpretation of ARCH Models", London School of Economics.

Stock, J., et M., Watson (1989) : "New Indexes of Coincident and Leading Economic Indicators", 351-401

Theil, H (1960) : "Best Linear Index Numbers of Prices and Quantites", Econometrica, 28, 464-480.

Vartia, Y (1976) : "Ideal Log. Change Index Numbers", Scandinavian Journal of Statistics, 3, 121-126.

Watson, M., et D., Kraft (1984) : "Testing the Interpretation of Indices in a Macroeconomic Index Model", Journal of Monetary Economics, 13, 165-181