

LA METHODE D'ADAPTATION
DANS LES MODELES MACROECONOMIQUES :
ANALYSE DE QUELQUES APPROCHES

Irina PEAUCELLE

N° 8208

Février 1982

S O M M A I R E

Introduction	1
I - L'ADAPTATION VUE COMME UNE DES METHODES DU CONTROLE OPTIMAL	1
1. Définition du processus adaptatif	2
2. Les méthodes adaptatives d'estimation des paramètres	5
3. L'apprentissage	7
II - L'UTILISATION DE LA METHODE D'ADAPTATION DANS LES MACROMODELES	13
1. Un procédé d'emploi de l'adaptation dans les macro- modèles dynamiques	13
2. Quelques possibilités de l'utilisation de l'adap- tation pour l'analyse dynamique de l'évolution économique	19
3. La méthode d'adaptation dans l'analyse prévisionnelle	32
Conclusion	35
Annexe	36
Bibliographie	42

LA METHODE D'ADAPTATION DANS LES MODELES MACROECONOMIQUES :
ANALYSE DE QUELQUES APPROCHES

Introduction

Dans cette étude ⁽¹⁾ de travaux récents en matière d'économie mathématique et de planification, on cherche à déterminer le champ d'application de la méthode d'adaptation ⁽²⁾, principalement pour l'analyse des modèles macroéconomiques. Dans ce domaine la méthode d'adaptation sert à la résolution souple de certains problèmes posés aux modélisateurs, tels que :

- l'analyse approfondie des facteurs de l'évolution passée de l'économie ;
- la conception de modèles normatifs multivariants et/ou de simulation à des paramètres structurels dynamiques.

Premièrement, on situe la méthode d'adaptation par rapport à la théorie du contrôle optimal dont elle fait partie.

Deuxièmement, on fait référence aux méthodes d'adaptation comme prolongement des méthodes du lissage exponentiel d'estimation des paramètres des modèles unidimensionnels.

Troisièmement et principalement, on discute les travaux d'application concrets de la méthode d'adaptation à l'analyse des macromodèles, faits par les économistes de l'Académie des Sciences de Novossibirsk.

I - L'ADAPTATION VUE COMME UNE DES METHODES DU CONTROLE OPTIMAL

Le système (abstrait) désigne un objet entier, composé d'éléments liés entre eux et se trouvant en interaction. La commande d'un système prévoit l'organisation particulière d'un tel ou d'un autre processus dans le but d'atteindre les objectifs fixés. Elle est formulée mathématiquement si sont définis :

- l'objectif, exprimé par le critère de qualité (de la commande),
- les contraintes qui limitent les modes possibles d'évolution du système,

(1) Ce texte présente une actualisation du rapport scientifique CORDES (I. PEAUCELLE (1979)).

(2) En anglais "adaptive control" que nous traduisons par méthode d'adaptation ou adaptation de préférence à contrôle adaptatif.

- les contraintes qui traduisent la limitation des moyens utilisés dans la commande.

Le mode de commande est appelé optimal quand il satisfait aux conditions ci-dessus et se rapproche le mieux (selon les critères de qualité de la commande) des objectifs ⁽¹⁾.

Les développements récents de la théorie du contrôle optimal appliqué à l'économie ont été présentés dans une étude de L.F. PAU (1979). Notre tâche est, d'une part, beaucoup plus réduite. En effet, les systèmes en général peuvent être déterministes, stochastiques ou adaptatifs ⁽²⁾ (R. BELLMAN (1961) p. 198). Dans le cadre de ce travail on n'analyse que les recherches concernant les modèles adaptatifs. D'autre part, l'exposé va jusqu'à la présentation des résultats concrets d'exploitation de la méthode d'adaptation, tandis que PAU fait, en quelque sorte, une classification des résultats théoriques uniquement.

1. Définition du processus adaptatif

Décrit formellement, le processus adaptatif se distingue par un certain degré d'incertitude statistique — "incertitude subjective". Cette "incertitude subjective" provient du fait qu'on utilise les effets constatés des décisions prises en temps réel pour modifier l'estimation des paramètres du modèle (HELMER J.V. (1972), PACKER A.A. (1972)).

La modélisation adaptative en macroéconomie fait la synthèse de l'approche analytique de la prise de la décision, qui maximise l'utilité dans les conditions d'incertitude ⁽³⁾, et l'approche économétrique, qui est utilisée dans les modèles empiriques. Certainement l'adaptation ne recouvre ces deux approches, c'est-à-dire ne réunit pas tous leurs avantages.

En économie on choisit la procédure adaptative, quand on traite de problèmes de prise de décision dynamique dans les cas où les données a priori sur l'état du système socio-économique sont insuffisantes (les interdépendances entre les variables sont mal connues), l'influence des variables exogènes sur la performance est très importante et quand la complexité des problèmes à résoudre ne permet pas l'utilisation de méthodes stochastiques (expérimentations impossibles).

(1) Définition empruntée à Y. KORCHOUNOV (1975).

(2) Les systèmes adaptatifs n'ont pas été le sujet d'étude de L.F. PAU.

(3) L'axiomatisation de l'adaptation sous sa forme analytique la plus générale est présentée par R.H. DAY (1975). L'interprétation de la recherche de l'équilibre dynamique dans les modèles néo-classiques comme processus d'adaptation est développée dans les travaux de R.H. DAY (1979), R.H. DAY et A. CIGNO (1978), AUBIN J.P. et R.H. DAY (1980).

Modèle initial

Le modèle initial est estimé et sa résolution numérique est assurée. Donnant les valeurs aux variables ⁽¹⁾ exogènes non contrôlées y_t^* et variables "instruments" X_t , à partir d'une structure α des paramètres, le modèle initial fournit les estimations conditionnelles de l'état de l'environnement à $t+1$.

$$y_{t+1}^c = f(\alpha/y_t^*, X_t) \quad (1.1)$$

Décideur et paramètres de décision

Soit X l'ensemble des variables "instruments" défini dans le modèle initial. On peut spécifier des sous-ensembles $\{x^a\}$, $\{x^b\}$..., $\{x^n\}$ qui correspondent aux prises des décisions des agents a, b, \dots, n . Ceci est important, car la modélisation adaptative a comme but aider à la prise des décisions.

Pour compléter les rôles des décideurs économiques, il est possible de formuler pour chacun des i ($i = a, b, \dots, n$) les fonctions objectifs ϕ^i .

La fonction objectif

La fonction objectif est donnée pour mesurer la performance du système.

$$\phi = \phi(\{\theta_t\}) \quad (1.2)$$

$$\theta_t = \theta_t(y_t^j, x_t^i) \quad (1.3)$$

La fonction objectif dans la procédure de la modélisation adaptative fournit une mesure comparative qui peut être utilisée dans les buts heuristiques limités. Quand elle est utilisée pour comparer les résultats, le décideur peut modifier ou ignorer les valeurs admissibles par ϕ ou θ .

La fonction est utile :

- pour mesurer le degré de changement dans l'organisation ;
- pour mesurer le volume d'information obtenue.

(1) En ce qui concerne les variables, on distingue (voir Deleau M. et P. Malgrange (1975) p.225) :

- variables "objectifs" qui correspondent aux variables en quelque sorte "finales" intéressant le décideur ;
- variables "instruments" ou décisionnelles, c'est-à-dire tous les paramètres dont le décideur a un contrôle direct ;
- variables non contrôlées, qui recensent les éléments "pertinents" pour le problème de décision, considéré et dont la valeur est fixée en dehors du champ d'intervention du décideur.

Le système d'information

Le système d'information $I = D, R_1, R_2, \dots, R_t$ est le stock des données. D l'information nécessaire pour formuler le modèle initial et des R_t , sont les mesures de la performance du système durant la période de simulation. La bibliothèque des événements exogènes contient la description des chocs extérieurs possibles du système et des conséquences des événements probables ou réels. Elle génère les R_t fonctions des événements exogènes.

$$R_t = \gamma_t (x_t, u_t) \quad (1.4)$$

Le modèle dynamique

Le modèle dynamique est la formalisation de l'environnement sous la forme :

$$y_{t+1} = f_t (y_t, x_t, u_t) \quad (1.5)$$

où f_t est la fonction de la transformation complète

u_t les erreurs (les bruits).

Les variables exogènes et les erreurs n'ont à être spécifiées pour un moment donné que lorsque les résultats de la période précédente sont déterminés.

Autrement dit, la procédure de l'adaptation est itérative et englobe les étapes suivantes :

- 1) à partir du modèle initial avec la fonction objectif (qui décrit les décisions optimales) on fixe les décisions de départ ;
- 2) on observe les effets des décisions prises ;
- 3) on modifie le modèle à partir des connaissances acquises ;
- 4) on redétermine la fonction objectif compte tenu des modifications dans le modèle.

En ce qui concerne la technique retenue, elle est propre d'un côté à la commande optimale et de l'autre à l'identification, utilisées en automatique.

La conception du modèle économique adaptatif prévoit l'identification au sens large des relations structurelles, des facteurs et des indicateurs. Mais aussi l'identification stricto sensu des paramètres du modèle.

2. Les méthodes adaptatives d'estimation des paramètres

La méthode d'adaptation sert à concevoir les modèles avec des structures changeantes. Une telle conception passe, entre autres, par la dynamisation des paramètres α_t $t \in [t_0, t_T]$. Les méthodes économiques traditionnelles (M.C.O. par exemple) servent à estimer les coefficients en tant que invariants structurels du système. On suppose qu'ils ne changent pas durant une période plus ou moins longue. Cette supposition, si on est sûr qu'elle est correcte, permet certaines conclusions à propos de la structure des liens de cause à effet dans le modèle et l'objet étudié.

Pourtant, la description statistique du processus montre l'évolution en moyenne et néglige les tendances qui apparaissent et qui peuvent modifier sensiblement son évolution. D'où le développement des méthodes qui s'appuient principalement sur les données les plus récentes.

L'estimation des paramètres à un moment donné se fonde sur leurs valeurs estimées antérieurement et de la nouvelle information sur l'état du système

$$\alpha_t(n) = \alpha_t(n-1) + k_t (R_t - \hat{R}_t) \quad (1.6)$$

Lissage exponentiel

L'analyse des tendances d'un processus dynamique peut être faite par la méthode du lissage. Le lissage exponentiel se réalise par la formule récursive suivante :

$$M_t = \beta \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i x_{t-i} \quad (1.7)$$

où x_t = série temporelle

M_t = valeur de la moyenne exponentielle à l'instant t

β = paramètre de lissage ; $\beta = \text{const}$, $0 < \beta < 1$,

$\gamma = 1 - \beta$

Et il peut être considéré comme un filtre dans lequel entrent les éléments de la suite x_t et en sortent les valeurs courantes de la moyenne exponentielle. Plus β est petit, plus les écarts entre les éléments de x_t sont filtrés. Plus le processus s'éloigne de l'état initial, plus "le poids" des données récentes est important. Ainsi ce calcul de la moyenne exponentielle se présente comme une méthode simple d'adaptation.

Les méthodes qui découlent du lissage exponentiel différent par la règle d'appréciation "des poids" γ^i .

Les procédés donnant les filtres optimaux et changeants dans le temps pour les processus non-stationnaires ont été proposés par KALMAN R. (1960) et KALMAN R., BUEY R. (1961).

ATHANS M. (1974) discute leur utilité pour l'analyse économique, RUSTEM et all. (1976) se servent de ces méthodes pour estimer les paramètres des équations du modèle récursif input-output du Royaume-Uni, VISHWAKARMA (1974) et AAGAARD SVENDSEN (1976) respectivement pour les modèles linéarisés récursif des Pays-Bas et simultané non-linéaire du Danemark ⁽¹⁾. T. LAWSON (1980) l'emploie pour les prévisions du taux d'inflation, qui sont intégrées par la suite dans le modèle économétrique du comportement des épargnants.

Le filtre adaptatif utilise l'analyse de l'erreur des estimations de l'état du système par rapport à l'observation de cet état à t pour créer la règle d'estimation du poids des éléments des suites x_t .

Les modèles de l'adaptation avec des paramètres changeants selon les règles inspirées du lissage exponentiel sont analysés par U.P. LAUKACHINE (1979) ⁽²⁾. On ne s'arrêtera pas davantage à ces modèles, car ils portent sur des processus isolés, tandis que notre but est le modèle macroéconométrique.

L'approximation stochastique

Quand la fonction objectif ϕ (équation (1.2)) (ou la fonction y_t (équation (1.5)) du système ne sont pas définies (ou pas définies complètement) on utilise pour estimer les paramètres α_t la méthode de l'adaptation qui s'inspire de l'approximation stochastique. Son principe consiste à faire fonctionner le système (faire des simulations avec le modèle) pour obtenir des échantillons des valeurs $\{\phi_k\}$ et $\{y_k\}$ correspondant aux différentes valeurs des paramètres $\{\alpha_k\}$. Les niveaux des fonctions qui en résultent (y compris les erreurs qu'ils contiennent) sont utilisés dans la théorie d'approximation stochastique pour indiquer les conditions dans lesquelles la suite $\{\alpha_k\}$ tend vers une valeur optimale $\bar{\alpha}$.

(1) Pour plus de précisions, voir le survey de PAU (1979) p. 251.

(2) LAUKACHINE U.P. (1979) donne une analyse comparative des méthodes de TRIGG D.W., LEACH A.G. (1967), RAO A.G., SHAPIRO A. (1970), BOX G.E., JENKINS G.M. (1957), THEIL H., WAGE S. (1964).

La méthode d'approximation stochastique servait au départ à la recherche des extremums des fonctions. Maintenant on a recours à elle dans les problèmes d'identification, d'adaptation, en reconnaissance des images et dans la recherche de l'optimum contraint (KUSHNER H.J., CLARK D.S. (1978), IOUDIN D.B. (1979)).

La maîtrise de l'évolution des paramètres dans le temps aide d'une part à influencer le système à travers la politique économique (contrôle rétro-actif) et d'autre part à changer la trajectoire d'évolution. Le contrôle dual dans le contexte économique reflète les phénomènes de mesure de l'état exact du système en évolution et la recherche des modifications à faire à partir de l'information relative à cet état. D.A. KENDRICK (1975) (1977) (1979) (1981) a spécialement étudié cet aspect de la théorie économique.

3. L'apprentissage

La conception des modèles utilisant les perturbations intervenues à toutes les étapes du fonctionnement du système pour faire estimer par le système lui-même les valeurs inconnues des paramètres α_t et des caractéristiques du processus stochastique λ_t pour transférer en conséquence l'état y_t à une position "plus favorable" (selon certains critères) en réévaluant les estimations précédentes, est appelée l'apprentissage.

De nombreuses études ont porté ces dernières années sur la mise au point des systèmes d'apprentissages, c'est-à-dire des systèmes qui peuvent au cours du temps améliorer leur fonctionnement (SWORDER D. (1966), FELDBOUM A.A. (1966), FU K.S. (1968), TSYPKIN Ia. Z. (1967) (1968), Mac ROE E.C. (1975). Le principe de la construction de ces systèmes est basé sur des algorithmes récursifs stochastiques d'apprentissage.

Problème du but

L'apprentissage sous-entend l'existence d'un but qui soit le résultat d'apprentissage. Dans le contexte du système adaptatif, le but ne peut pas être décrit explicitement à cause du manque d'information a priori. Prenons l'exemple de la fusée qui doit poursuivre un objet, dont la stratégie de déviation n'est pas connue. Le but du changement des paramètres de la fusée est simple à expliquer, mais il ne peut pas être formalisé explicitement car il dépend du comportement de l'autre objet. Si ce n'est pas le cas (le but peut être décrit explicitement), on n'a plus besoin du processus d'apprentissage, car le but peut être obtenu par un autre moyen, par exemple, par la résolution numérique du problème d'optimisation. La tâche essentielle de l'apprentissage est de combler le manque d'information a priori par l'utilisation de l'information qui apparaît au fur et à mesure du fonctionnement du système.

Ainsi le but du processus de l'apprentissage concerne l'état final du système. Indiquer le but consiste alors à choisir une certaine fonction dont l'extrême correspond à cet état.

Les changements du système se produisent par une variation des variables décisionnelles ou des paramètres du système.

Soit $C = (C_1, \dots, C_N)$ le vecteur qui caractérise les variables décisionnelles ou les valeurs des paramètres. On choisit une fonction $J(c)$ critère approprié de performance qui est basé sur des inputs x et des outputs c désirés. Par exemple, la fonction suivante :

$$J(c) = \int_x Q(x, c) p(x) dx \quad (1.8)$$

où x est le vecteur des variables aléatoires stationnaires

$p(x)$ est sa densité de distribution

$Q(x, c)$ est une fonction définie qui au fond représente pour chaque réalisation x la fonction aléatoire, dont l'espérance mathématique d'après (1.8) est égale à $J(c)$.

$$J(c) = E_x \{Q(x, c)\} \quad (1.9)$$

Si $Q(x, c)$ est continue par rapport à c , la condition nécessaire de l'extremum peut être écrite :

$$\nabla J(c) = E_x \{ \nabla_c Q(x, c) \} = 0$$

où $\nabla J(c) = \text{grad } J(c) = \left(\frac{\partial J(c)}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial J(c)}{\partial c_N} \right)$

est le gradient de $J(c)$ par rapport à l'argument c ;

et $\nabla_c Q(x, c) = \text{grad}_c Q(x, c) = \left(\frac{\partial Q(x, c)}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial Q(x, c)}{\partial c_N} \right)$

est le gradient de $Q(x, c)$ par rapport à c .

Le recours au processus adaptatif est nécessaire quand l'information a priori est incomplète ou insuffisante pour définir la fonction $J(c)$ (quand $p(x)$ n'est pas connu, par exemple).

Le processus d'apprentissage doit être construit de manière à ce que, avec les observations x et le gradient $\nabla_c Q(x, c)$ qui peut être mesuré, on obtienne, au cours du temps, une valeur optimale du vecteur $c = c^*$.

Le système décrit ainsi, est un système qui est asymptotiquement optimal, car la valeur optimale du vecteur $c = c^*$ n'est approchée qu'au cours du temps.

Les algorithmes d'apprentissage

Prenons l'équation (1.8). Supposons pour l'instant que la densité de la distribution $p(x)$ est connue et la fonction $J(c)$ est définie. Alors la condition nécessaire de l'existence de l'extremum de la fonction (minimum, le plus souvent) s'écrit :

$$\nabla J(c) = 0 \tag{1.10}$$

Généralement l'équation (1.10) ne peut pas être résolue par les méthodes de l'analyse mathématique ⁽¹⁾, et on utilise l'approche algorithmique. Le sens de cette approche consiste à remplacer l'équation statique (1.10) par l'équation dynamique, dont la résolution avec le temps tend vers le vecteur optimal $c = c^*$. Cette équation dynamique, différentielle (ou en différence finie) est l'algorithme de définition du vecteur optimal $c = c^*$.

(1) Sauf, si on recourt à des simplifications importantes, par exemple, à l'approximation de l'équation non linéaire (1.10) par l'équation linéaire.

L'algorithme itératif discret peut être représenté en différences finies par l'équation

$$c[n] = c[n-1] - A[n] \nabla J(c[n-1]) \quad (1.11)$$

$$\Delta c[n-1] = -A[n] \nabla J(c[n-1]) \quad (1.12)$$

L'algorithme continu est représenté par l'équation différentielle

$$\frac{dc(t)}{dt} = -A(t) \nabla J(c(t)) \quad (1.13)$$

où : $A[n]$ (resp $A(t)$) une matrice carrée dont les éléments sont constants ou dépendent de la valeur courante du vecteur $c[n-1]$ (resp $c(t)$).

Le choix de la matrice A doit assurer la convergence de $c[n]$ ou $c(t)$ vers la valeur optimale c^* .

Revenons au cas où la densité de la distribution $p(x)$ n'est pas connue, et la condition (1.10) ne peut pas alors être définie explicitement. C'est alors qu'on recourt aux algorithmes d'apprentissage pour obtenir le vecteur optimal de $c = c^*$.

L'algorithme d'apprentissage doit permettre de définir la suite de vecteurs $c[n]$ (ou $c(t)$), à partir des valeurs observées $x, c, \nabla_c Q(x, c)$, qui converge vers le vecteur optimal c^* .

Les algorithmes d'apprentissage reprennent les formules itératives décrites précédemment, en remplaçant le gradient de la fonction $\nabla J(c)$ inconnu par le gradient de la fonction aléatoire $\nabla_c Q(x, c)$ estimé à $t-1$:

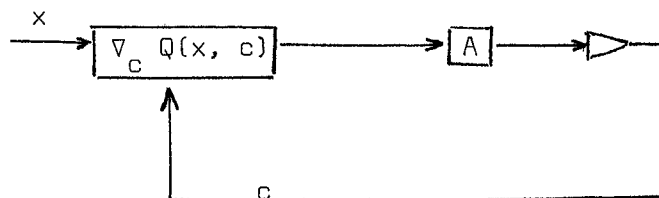
- algorithme discret d'apprentissage :

$$c[n] = c[n-1] - A[n] \nabla_c Q(x[n], c[n-1]) \quad (1.14)$$

- algorithme continu d'apprentissage :

$$\frac{dc(t)}{dt} = - A(t) \nabla_c Q(x(t), c(t)) \quad (1.15)$$

Schéma 1



A est la matrice carrée dont les éléments dépendent de n (ou t) et des vecteurs x et c . La nature aléatoire du gradient $\nabla_c Q(x, c)$ (l'existence des bruits) impose des conditions sur la transformation de la matrice A . Ses éléments doivent tendre vers zéro, car c'est seulement dans ces conditions que les vecteurs c peuvent tendre vers les valeurs optimales avec une probabilité égale à l'unité. ./.

Le schéma 1 montre le contenu du processus, qui permet avec le temps de compenser l'absence ou l'insuffisance d'information initiale par l'utilisation de l'information courante.

Convergence des algorithmes

Le but de l'apprentissage peut être atteint si les algorithmes convergent. Différentes définitions de la convergence peuvent être choisies. Par exemple, pour le cas où l'extrémum de la fonction est unique :

- l'algorithme discret converge presque certainement, si la suite $c[n]$ engendrée réalise la condition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \{ \| c[n] - c^* \|^2 \} = 0 \quad (1.16)$$

et/ou

$$\text{Prob} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \| c[n] - c^* \| = 0 \} = 1 \quad (1.17)$$

Cette définition est bonne pour les fonctions à l'extrémum unique. Mais pour le cas plus général, on dit que l'algorithme converge presque certainement quand les fonctions $J(c[n])$, qui sont définies par la suite $c[n]$ réalisent les conditions suivantes (cas discret) :

$$\text{Prob} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} [J(c[n]) - \text{extr} J(c)] = 0 \} = 1 \quad (1.18)$$

Le critère suffisant de convergence des algorithmes discrets ou continus peut être formulé ainsi, en s'aidant des fonctions $Q(x, c)$: l'algorithme de l'apprentissage converge presque certainement (Tsytkin (1970), p.19) si :

$$a) E_x \{ \nabla_c^T Q(x, c) \cdot \nabla_c Q(x, c) \} \leq d(\alpha + \|c\|^2) \quad (1.19)$$

$$\alpha = 0 \text{ ou } 1$$

b) les éléments γ_{ij} de la matrice diagonale $A[n]$ vérifient :

$$0 < \gamma_{ij} [n] \leq \gamma_{oi} \quad (1.20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{ij} [n] = \infty \quad (1.21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{ij}^2 [n] < \infty \quad (1.22)$$

./.

La condition a) limite la croissance de la fonction c'est-à-dire du gradient. Le gradient $\nabla J(c)$ doit croître, au plus, comme une fonction linéaire de la norme de c.

La condition b) exige que l'algorithme atteigne le minimum de la fonction objectif. Les $\gamma_{ij}[n]$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$) doivent diminuer mais pas trop vite pour ne pas s'arrêter à un point qui soit différent des points minima.

Les critères de qualité de l'apprentissage

Les contraintes posées sur les éléments de la matrice A dans l'algorithme d'apprentissage laissent néanmoins une grande liberté dans le choix de la matrice. On obtient plusieurs algorithmes qui se distinguent entre eux par leur qualité. Pour mesurer la qualité de l'apprentissage on introduit une mesure qui évalue à chaque moment du temps la "distance" entre l'état courant du système et l'état qui correspond au but de l'apprentissage.

L'algorithme qui fournit la distance minimale à chaque instant est l'algorithme d'apprentissage optimal. L'utilisation des algorithmes d'apprentissage optimaux pose beaucoup de problèmes difficiles à résoudre, par exemple, la nécessité du calcul préalable des valeurs initiales $c(t_0)$ et de la matrice des paramètres de l'algorithme $A(t_0)$. C'est pourquoi les algorithmes les plus répandus sont les algorithmes d'apprentissage suboptimaux et quasioptimaux, qui n'exigent pas tous les calculs préalables des conditions initiales.

Pour la mesure de la qualité de l'apprentissage on peut prendre $\hat{J}(c)$ de la fonction (1.8)

$$\hat{J}(c) = \int_x Q(x, c) \hat{p}(x) dx$$

où $\hat{p}(x)$, mesure empirique de la densité de la distribution $p(x)$, s'obtient à partir des observations $x[m]$:

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta(x - x[m]) \quad (1.23)$$

Ainsi le critère de qualité de l'apprentissage est :

$$\hat{J}(c[n]) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n Q(x[m], c[n]) \quad (1.24)$$

Ce critère impose des contraintes supplémentaires, en plus des (1.20)-(1.22), sur les éléments de la matrice $A[n]$. Elles sont plus ou moins rigoureuses du fait que l'on cherche à avoir un système d'apprentissage optimal ou suboptimal (quasioptimal).

II - L'UTILISATION DE LA METHODE D'ADAPTATION DANS LES MACROMODELES

Les exemples de l'utilisation de l'adaptation dans la modélisation des systèmes économiques nous sont donnés dans les travaux de l'Institut d'Economie et d'Organisation de Production Industrielle de l'Académie des Sciences à Novossibirsk en U.R.S.S. (appelé plus loin IEOPIN). Ci-après nous analyserons deux types d'approche et d'utilisation de modèles empiriques avec adaptation, pour l'analyse de l'évolution économique et pour les prévisions du développement économique. On se réfère aux travaux de LEVITSKY (1977) (1979) (1981) et LEVITSKY et all. (1977) (1979) (1981), qui ont abouti à des calculs numériques et permettent ainsi de voir l'intérêt et les limites de telles approches.

1. Un procédé d'emploi de l'adaptation dans les macromodèles dynamiques

La structure du modèle

La méthode adaptative a été testée sur des modèles macroéconomiques dont la partie non financière peut être résumée en quelques équations sous la forme la plus générale comme ceci :

$$\text{Equilibre Biens Ser.} \quad Q + I_m = C + I + G + Ex + \theta_1 \quad (2.1)$$

$$\text{Fonc. Investis.} \quad I = f_I(L) \left(Q, \frac{C}{W}, K_{-1}, \pi \right) \quad (2.2)$$

L - l'opérateur associativité
(distributivité) ⁽¹⁾

$$\text{Emploi} \quad N = f_N(L) \left(Q, \frac{C}{W} \right) \quad (2.3)$$

(1) Les propriétés de l'opérateur L permettent de déterminer les distributions des retards résultant de la composition des fonctions à retards échelonnés.

Capital fixe $K = K_{-1}(1-\delta) + I + \theta_4$ (2.4)

δ - taux de remplacement du capital

Importation $Im = m Q + \theta_5$ (2.5)

Exportation $Ex = \bar{Ex}$ (2.6)

Consommation des ménages $C = f_C(L) \left(\frac{R}{P}\right)$ (2.7)

R - revenu réel

Dépense publique $G = \bar{G}$ (2.8)

Prix $P = f_P(L) \left(\frac{WN}{Q}\right)$ (2.9)

Salaires $w = f_w(L) (p)$ (2.10)

Revenu disponible $R = wN + \alpha \pi + \theta_{11}$ (2.11)

Profits $\pi = pQ - wN + \theta_{12}$ (2.12)

Les équations (2.1), (2.4), (2.5), (2.11) et (2.12) sont des équations d'équilibre ou d'état du système. θ_i les variables aléatoires des erreurs d'estimation et des perturbations dues aux estimations.

Les équations (2.2), (2.3), (2.7), (2.9) et (2.12) sont les équations économétriques. Les variables (2.6) et (2.8) sont exogènes.

Parmi les coefficients structurels du modèle général, les coefficients de certaines relations économétriques ont été choisis par IEOPIN pour être estimés par la méthode adaptative. Ces équations

1) relient des éléments de la consommation finale (variables endogènes) avec la valeur ajoutée ;

2) définissent le volume d'emploi ;

3) définissent les salaires à travers les prix ;

4) définissent les investissements.

Dans les modèles macroéconométriques de l'IEOPIN appliqués à l'URSS et au Japon (Levitsky (1977)) il y avait respectivement 25 et 27 équations de régression, chacune était fonction d'environ quatre facteurs. Ainsi les chercheurs de l'IEOPIN ont étudié les variations d'environ 100 coefficients dans chaque modèle et ont comparé les résultats avec des modèles à structure fixe. L'application aux Etats-Unis ne comptait que 9 équations économétriques et environ 36 coefficients, mais déjà ce nombre réduit de changement dans la structure a permis des résultats intéressants.

Formulation du problème d'apprentissage

Soit $F_t = \{F_{it}\}$ la réunion des fonctions économétriques du modèle, $i = 1, \dots, m$

$$I = f_I(L) \left(Q, \frac{C}{W}, K_{-1}, \pi \right) \quad (2.2)$$

$$N = f_N(L) \left(Q, \frac{C}{W} \right) \quad (2.3)$$

$$c = f_c(L) \left(\frac{R}{P} \right) \quad (2.7)$$

$$w = f_w(L) \left(\frac{Q}{N} \right) \quad (2.10^*)$$

$\alpha = (\alpha_{ij})$ - la matrice composée des coefficients des régressions
 $i = 1, \dots, m$
 $j = 0, \dots, n$

$\phi_t = (\phi_{ij}^t)$ - la matrice composée des facteurs explicatifs des régressions
 $i = 1, \dots, m$
 $j = 0, \dots, n$

où ϕ_{i0}^t sont égaux à l'unité.

Alors les éléments du vecteur F_t sont :

$$F_{it} = \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{ij} \phi_{ij}^t + u_{it} \quad (2.13)$$

u_{it} - vecteur des variables aléatoires avec une distribution normale, les moyennes nulles et la dispersion finie.

./.

Cas d'utilisation de l'adaptation sur période rétrospective

Quand on a la valeur observée du vecteur F_t , soit vecteur F_t^R on peut l'utiliser en tant que critère du changement des variables et de la structure du modèle. Pour les valeurs initiales des éléments de F_t , c'est-à-dire à t_0 , on utilise les coefficients de régression calculés sur toute la période. Le problème consiste à faire changer le système inconnu (sa structure et ses paramètres) au cours du temps à l'aide de la méthode d'apprentissage pour s'adapter au système réellement étudié.

Cas d'utilisation prospective de l'adaptation

Pour les prospectives, la méthode de l'adaptation peut être appliquée si l'une des hypothèses suivantes est respectée :

- 1) l'évolution d'une ou de plusieurs variables économiques peut jouer le rôle d'étalon ;
- 2) il existe entre certains éléments du système des relations fixes ;
- 3) on utilise pour les extrapolations les séries des coefficients de régressions, obtenus par la méthode d'adaptation dans la période de base.

L'apprentissage dans l'adaptation du modèle de IEOPIN

Comme but de l'apprentissage on peut choisir la minimisation de la moyenne quadratique de la différence des valeurs calculées F_t ou valeurs observées F_t^R , alors la fonction objectif s'écrit :

$$J_t(\Phi, \alpha) = 1/2 (F_t^R - F_t)^2 \rightarrow \min \quad (2.14)$$

et les α_{ij}^t et ϕ_{ij}^t doivent satisfaire au système des équations du modèle général (2.14) et (2.1), (2.4), (2.5), (2.6), (2.8), (2.11), (2.12), appelé (A).

Le problème d'apprentissage optimal de ce modèle est le suivant : trouver la valeur des coefficients $\bar{\alpha}_{ij}^t$ et des facteurs $\bar{\phi}_{ij}^t$ $i = 1, \dots, m$
 $j = 0, \dots, n$
qui satisfont au système des équations (A) et à la condition (2.14).

Dans le modèle (2.14)-(A) les éléments de la matrice ϕ_t ne sont pas connus. On connaît seulement certaines réalisations des ϕ_{ij}^t et de ce fait certaines réalisations de la fonction objectif (2.14). Dans ces conditions $\bar{\alpha}^t$ (les vecteurs optimaux) peuvent être obtenus avec l'algorithme d'apprentissage.

Pour le modèle (2.15)-(A) cela s'écrit :

pour i, j donné

$$\alpha^t[n] = \alpha^t[n-1] + A[n] \nabla_{\alpha} Q(\phi^t[n], \alpha^t[n-1]) \quad (2.15)$$

où

$$Q_i(\phi_i^t[n], \alpha_i^t[n-1]) = \frac{1}{2} (\text{Fit}^r - \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}^t[n-1] \phi_{ij}^t[n])^2$$

$i = 1, \dots, m$

$n = 1, 2, \dots$ les itérations.

t - époque .

$\nabla_{\alpha} Q$ - gradient de la fonction Q .

Pour les valeurs initiales $\alpha^1[0]$ de la première période on prend les coefficients des équations des régressions (calculées avec la méthode des moindres carrés ordinaires (par exemple)).

Pour une période quelconque $t > 1$, on prend comme valeurs initiales $\alpha_i^t[0]$ - les coefficients $\bar{\alpha}_i^{t-1}$ obtenus à la période précédente.

Si comme critère de qualité d'apprentissage on choisit la mesure de la fonction $J(\alpha)$

$$\hat{J}_i(\alpha_i^t[n]) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n Q_i(\phi_i^t[m], \alpha_i^t[n])$$

la matrice $A[n]$ doit être :

$$A_i[n] = \left(\sum_{m=1}^n \phi_i^t[m] (\phi_i^t[m])^* \right)^{-1} \quad (2.16)$$

Les calculs de l'équation (2.15) avec la matrice $A_i[n]$ définie en (2.16) entraînent des difficultés considérables.

Pour éviter ces difficultés on peut utiliser l'algorithme quasi-optimal d'apprentissage qui exige l'approximation de la matrice $A_i[n]$ par la matrice diagonale

$$A_{1i}[n] = \begin{vmatrix} \gamma_{1i}[n], 0, \dots, & 0 \\ 0 & , \gamma_{2i}[n], \dots, 0 \\ 0 & , & 0 , \dots, \gamma_{Ni}[n] \end{vmatrix}$$

En utilisant les résultats obtenus par Tovstoukha T.I. (1974) pour ce modèle, les chercheurs de l'IEOIN ont pu avoir quatre algorithmes d'apprentissage quasioptimaux. En ajoutant les conditions de la convergence de l'algorithme d'apprentissage(cf.1.20-1.22)qui pose à son tour les contraintes sur les éléments de la matrice A, ils ont eu une matrice

$$A_i[n] \text{ avec les éléments } \gamma_{ij}[n] = \frac{1}{\sqrt{n}} (\phi_{ij}^t[n])^2$$

qui donne un algorithme quasioptimal avec une bonne rapidité de convergence (après une dizaine d'itérations).

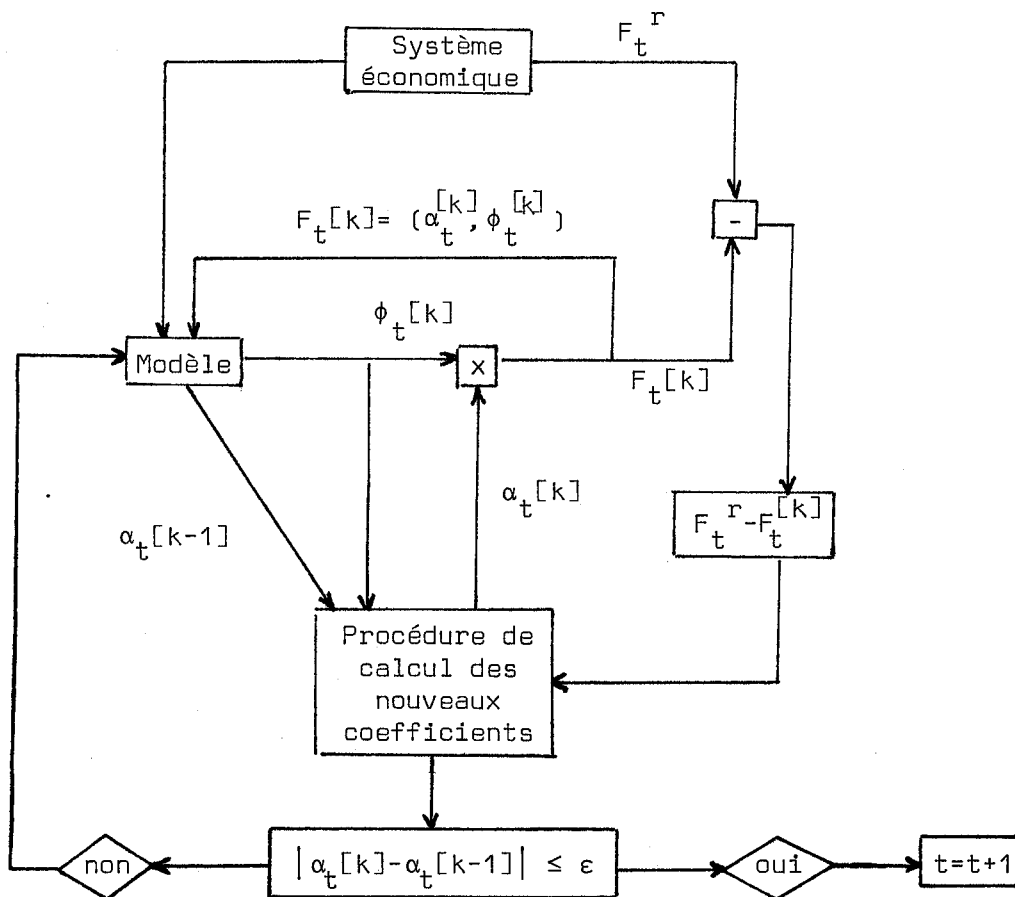
Ainsi le calcul des nouveaux coefficients de α_{ij}^t pour chaque observation des facteurs ϕ_{ij}^t s'effectue selon la procédure suivante :

$$\alpha_{ij}^t[n] = \alpha_{ij}^t[n-1] + \left(\frac{(|\alpha_{ij}^t[n-1]| \cdot \phi_{ij}^t[n])}{\left(\sum_{j=0}^N |\alpha_{ij}^t[n-1]| \cdot \phi_{ij}^t[n] \right)} \right) \times \left(\frac{1}{(n^{1/2} (\phi_{ij}^t[n]^2))} \right) \times \left(\text{Fit}^r - \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}^t[n-1] \cdot \phi_{ij}^t[n] \right) \phi_{ij}^t[n] \quad (2.17)$$

j=0, ..., n i = 1, ..., m

./.

Schéma du modèle d'apprentissage



2. Quelques possibilités de l'utilisation de l'adaptation pour l'analyse dynamique de l'évolution économique

Dans le modèle élaboré à l'Institut de l'Economie et de l'Organisation de la Production Industrielle de Novossibirsk (IEOPIN), appliqué à l'URSS, aux Etats-Unis et au Japon, on a utilisé la méthode d'adaptation pour faire varier les coefficients des régressions (2.2) (2.3) (2.7) (2.10).

Les coefficients changeants et réestimés pour chaque année de la période rétrospective ont permis d'obtenir les valeurs des variables investissements, consommation des ménages, emploi et salaires qui convergeaient avec le degré de précision désiré vers les valeurs observées sur la période. Le calcul de la valeur ajoutée par contre ne pouvait pas donner de résultat coïncidant avec les données observées car il dépend entre autres des imperfections liées à la structure fixe dans ce modèle de la matrice de consommation intermédiaire.

C'est pourquoi il est intéressant de comparer les résultats des calculs de la valeur ajoutée (avec et sans adaptation) avec les données observées pour la même période.

Pour mesurer le degré d'approximation des valeurs calculées et des valeurs observées on a calculé à l'IEOPIN l'écart moyen quadratique relatif par rapport aux observations ⁽¹⁾.

Tableau 2.1.

Les écarts quadratiques relatifs par rapport aux observations (en %) concernant les valeurs ajoutées

Modèle appliqué à	Sans adaptation	Avec adaptation
U.R.S.S.	12,1	2,9
U.S.A.	3,7	1,8
Japon	7,9	3,5

On peut voir que la méthode d'adaptation améliore l'approximation de l'ordre de 2 fois dans le modèle appliqué aux Etats-Unis et au Japon et de 4 fois dans le modèle appliqué à l'U.R.S.S.

La réestimation permanente des coefficients des équations économétriques au fur et à mesure des moments où l'on dispose de nouvelles données permet, comme on l'a vu dans le tableau 2.1., d'obtenir des résultats plus proches des valeurs observées. Mais dans un modèle avec une structure changeante, il est plus contraignant d'interpréter les paramètres comme des caractéristiques des liens de causalité économiques. De ce point de vue, on peut exprimer certaines réserves sur les fondements de l'analyse proposée par l'IEOPIN des facteurs d'évolution, analyse exposée ci-après.

Les équations économétriques d'un modèle peuvent être interprétées comme les fonctions de production. Les unes caractérisent l'influence du volume et de la dynamique des facteurs de production sur la dynamique des produits finis (relations directes), les autres, l'influence de la redistribution du produit national sur la dynamique des facteurs de production (feed back).

(1) L'écart moyen quadratique relatif par rapport aux observations =

$$\frac{\text{écart moyen quadratique}}{\text{moyenne}} = \frac{\text{la racine carrée des écarts aux observations}}{\text{moyenne}}$$

Le système des fonctions de production dans les modèles adaptatifs permet l'analyse dynamique des facteurs de l'évolution économique, car les coefficients changent d'une période à l'autre.

A partir de la fonction de production de type :

$$Z_t = \alpha_{0,t} + \alpha_{1,t} X_{1,t} + \dots + \alpha_{m,t} X_{m,t}$$

l'écart entre deux valeurs voisines de la fonction s'écrit de plusieurs manières, selon que les écarts temporels portent sur α ou X .

$$Z_t - Z_{t-1} = \alpha_{0,t} - \alpha_{0,t-1} + \sum_{i=1}^m (\alpha_{i,t} X_{i,t} - \alpha_{i,t} X_{i,t-1} + \alpha_{i,t} X_{i,t-1} - \alpha_{i,t-1} X_{i,t-1}), \quad (*)$$

$$Z_t - Z_{t-1} = \alpha_{0,t} - \alpha_{0,t-1} + \sum_{i=1}^m (\alpha_{i,t} X_{i,t} - \alpha_{i,t-1} X_{i,t} + \alpha_{i,t-1} X_{i,t} - \alpha_{i,t-1} X_{i,t-1}) \quad (**)$$

La somme des deux expressions donne :

$$Z_t - Z_{t-1} = \Delta\alpha_{0,t} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\alpha_{i,t} + \alpha_{i,t-1}}{2} \cdot \Delta X_{i,t} + \frac{X_{i,t} + X_{i,t-1}}{2} \cdot \Delta\alpha_{i,t} \right), \quad (***)$$

La formule du taux de croissance peut s'écrire :

$$\frac{\Delta Z_t}{Z_{t-1}} = \frac{\alpha_{0,t-1}}{Z_{t-1}} \cdot \frac{\Delta \alpha_{0,t}}{\alpha_{0,t-1}} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\alpha_{i,t} + \alpha_{i,t-1}}{2} \cdot \frac{X_{i,t-1}}{Z_{t-1}} \frac{\Delta X_{i,t}}{X_{i,t-1}} + \frac{X_{i,t} + X_{i,t-1}}{2} \cdot \frac{\alpha_{i,t-1}}{Z_{t-1}} \cdot \frac{\Delta \alpha_{i,t}}{\alpha_{i,t-1}} \right) \quad (2.18)$$

La formule (***) donne la décomposition de l'accroissement de Z_t parmi les facteurs tenant compte de leur efficacité.

L'expression $In_{t,i}$:

$$In_{t,i} = \frac{\alpha_{i,t}}{Z_{t-1}} \cdot \frac{\Delta \alpha_{i,t}}{\alpha_{i,t-1}} \cdot \frac{X_{i,t} + X_{i,t-1}}{2} \quad (2.19)$$

est appelée la composante intensive.

La composante dite extensive $Ex_{t,i}$ est :

$$Ex_{t,i} = \frac{X_{i,t-1}}{Z_{t-1}} \cdot \frac{\Delta X_{i,t}}{X_{i,t-1}} \cdot \frac{\alpha_{i,t} + \alpha_{i,t-1}}{2} \quad (2.20)$$

Alors

$$In_t = \sum_{i=1}^m In_{t,i}$$

donne l'accroissement de Z_t dû aux composantes dites intensives des facteurs, et

$$Ex_t = \sum_{i=1}^m Ex_{i,t}$$

donne la part de l'accroissement dû aux composantes dites extensives des facteurs.

$$\frac{\Delta \alpha_{0,t}}{Z_{t-1}}, \text{ mesure l'influence des facteurs non identifiés.}$$

A partir du modèle dynamique (2.14)-(A) appliqué à l'U.R.S.S., E.M. LEVITSKY et N.A. BONDARENKO de l'IEOPIN (LEVITSKY E.M. (1977)) ont analysé les facteurs de croissance et leur importance pour certaines variables du modèle.

A titre d'exemple, reproduisons le tableau des résultats obtenus par l'IEOPIN pour la consommation des ménages. La consommation des ménages est une fonction des revenus des ménages (W_t) et de la valeur ajoutée (Q_t) qui définit les prestations et la consommation des biens collectifs

$$C_t = \alpha_{1,t} Q_t + \alpha_{2,t} W_t + \alpha_{3,t}$$

Les facteurs extensifs de la croissance de la consommation sont les salaires et la valeur ajoutée en volume, et le facteur intensif est le niveau des prix.

Tableau 2.2.

Décomposition parmi les facteurs du taux de croissance
de la consommation des ménages en U.R.S.S. (%)

Année	Valeur ajoutée		Revenus		Facteurs non identifiés	% d'accroissement selon les simulations	Somme des facteurs*	Dont	
	Facteurs intensifs	Facteurs extensifs	Facteurs intensifs	Facteurs extensifs				Intensifs	Extensifs
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1952	-0,42	1,05	-0,95	3,92	-0,47	2,92	3,17	-1,38	4,96
1953	0,46	1,25	1,02	3,93	0,42	6,63	7,06	1,46	5,18
1954	0,92	1,74	2,13	4,89	0,81	9,67	10,49	3,04	6,64
1955	-0,74	1,88	-1,73	4,57	-0,61	2,98	3,36	-2,46	6,45
1956	-0,62	2,28	-1,48	7,02	-0,47	5,98	6,73	-2,10	9,91
1957	1,83	1,54	4,32	2,94	1,31	10,97	11,94	6,15	4,48
1958	-0,36	3,88	-0,84	6,78	-0,23	8,23	9,23	-1,20	10,66
1959	0,32	1,39	0,93	2,36	0,19	4,80	4,99	1,05	3,75
1960	-0,35	2,04	-0,82	6,90	-0,20	6,83	7,57	-1,17	8,94
1961	-1,05	1,42	-2,56	6,26	-0,55	3,01	3,52	-3,61	7,69
1962	0,49	2,29	1,17	5,15	0,24	8,63	9,34	1,66	7,44
1963	-0,01	1,62	-0,03	3,53	-0,01	4,84	5,11	-0,04	5,16
1964	-0,22	2,29	-0,52	3,65	-0,01	4,78	5,11	-0,74	5,94
1965	0,26	2,33	0,58	5,63	0,10	8,22	8,88	0,82	7,96
1966	-0,30	2,65	-0,69	5,69	-0,11	6,64	7,24	-0,99	8,34
1967	0,20	2,19	0,47	5,73	-0,07	8,01	8,67	0,67	7,93
1968	0,12	2,24	0,27	5,66	0,04	7,71	8,32	0,39	7,90
1969	0,17	2,39	0,40	4,62	-0,05	7,12	7,62	0,58	7,00
1970	-0,04	3,09	-0,08	4,65	-0,01	7,04	7,61	-0,72	7,74
1971	-0,16	2,32	-0,36	4,21	-0,04	5,60	5,97	-0,52	6,54
1972	-0,02	1,33	-0,06	4,65	-0,01	5,56	5,90	-0,08	5,99
1973	-0,33	2,50	-0,74	3,63	-0,07	4,66	4,98	-1,07	6,14
1974	-0,01	1,53	-0,02	3,92	-0,002	5,13	5,42	-0,03	5,45
1975	-0,02	1,38	-0,03	3,98	-0,003	5,03	5,30	-0,05	5,35

Source : LEVITSKY (1981) p. 68.

(*) Les chiffres dans la colonne (7) "Somme des facteurs" ne sont pas exactement les totaux des sommes des facteurs (colonnes (1)-(5)) à cause des arrondis.

Le tableau appelle plusieurs commentaires.

- 1) L'écart entre les taux d'accroissement de la consommation des ménages estimés selon la formule (2.18) et ceux obtenus d'après la simulation (2.14)-(A) ne dépasse pas 1 % (colonnes (6) et (7)).
- 2) Le taux de croissance de la consommation sur la période est de 6,8 % en moyenne par an, avec les points hauts en 1954 et 1957 où il était de l'ordre de 10 %, et les points bas en 1952, 1955, 1961 où il n'était environ que de 3 %. Les trois années de faible croissance correspondent à une accentuation de l'influence négative des facteurs intensifs surtout ceux des revenus, et spécialement en 1961 (qui est l'année de la réforme monétaire). Jusqu'à 1954 il y avait des baisses massives des prix et cela a joué sur l'accroissement de la consommation, en 1954 en particulier. Durant l'année 1957, la consommation s'accroît, entre autres grâce à des facteurs non identifiés dans le modèle. Elle était en fait liée à la hausse du niveau du salaire de base non imposable.
- 3) Le rôle des revenus est primordial dans la croissance de la consommation. Pourtant, l'impact stable et supérieur à 2 % de la valeur ajoutée caractérisait la période 1964-1971. Depuis 1971 on remarque un ralentissement de la croissance générale de la consommation, dû à la baisse de l'influence des facteurs extensifs et à la stabilité de l'influence négative des facteurs intensifs.

En somme, la croissance de la consommation des ménages dépendait beaucoup des facteurs extensifs, tandis que les facteurs intensifs jouaient souvent un rôle négatif. Cela s'explique en partie par l'augmentation des prix depuis 1954.

L'adaptation dans l'analyse des multiplicateurs du modèle macro-économique

Pour connaître les qualités dynamiques et l'utilité du modèle dynamique empirique, on recourt à des méthodes analytiques. M. Deleau et P. Malgrange (1974) distinguent les méthodes externes et les méthodes internes d'analyse. Parmi ces méthodes nous exposerons ici seulement l'analyse des multiplicateurs du modèle adaptatif de l'IEOPIN, où le processus d'adaptation peut apporter quelques contributions à l'analyse du modèle empirique. Pour les autres méthodes, des valeurs propres, de la stabilité du système par rapport à la trajectoire d'équilibre, nous renvoyons à l'étude de Levitsky (1977).

L'analyse des multiplicateurs consiste à calculer l'effet que produit sur le modèle (variable endogène x) une variation unitaire d'une variable exogène y . On distingue les multiplicateurs instantanés qui mesurent l'effet de $\Delta y(t) = u$ sur $x(t)$; les multiplicateurs dynamiques à τ périodes, l'effet de $\Delta y(t) = u$ sur $x(t+\tau)$ et les multiplicateurs totaux, l'effet de $\Delta y(1) = \Delta y(2) = \dots = u$ sur $x(\infty)$.

Pour les modèles linéaires le calcul des multiplicateurs ne pose pas de problème. A partir des modèles dont la forme structurelle (équation (1.1)) est estimée économétriquement, on peut passer à la forme réduite (équation (1.2)). Cette transformation conduit dans un modèle input-output à une matrice de la reproduction élargie dont les éléments caractérisent les effets "marginaux".

Soit

$$Z_t = S Z_{t-1} \quad \text{la forme réduite du modèle} \quad (2.21)$$

où la matrice $S = M^{-1}N$

M matrice des coefficients des variables à t

N matrice des coefficients des variables décalées

et les éléments de cette matrice $S(s_{ij})$ donnent la mesure des effets endogènes "marginaux".

Pour les modèles économétriques appliqués à l'U.R.S.S. (Levitsky (1977)) la transformation en forme réduite a été faite pour l'année 1966 et 1972 avec la méthode de l'adaptation, c'est-à-dire qu'on a utilisé des coefficients structurels adaptatifs à ces deux périodes. La transformation a permis d'avoir deux matrices : S_{1966} et S_{1972} de la production élargie.

A partir des matrices S il a été possible de donner l'interprétation économique des multiplicateurs. Ainsi, la matrice S a été divisée en quatre blocs. Les éléments du premier bloc expriment :

$$s_{ij} = \Delta Q_{i,t} / \Delta Q_{j,t-1} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.22)$$

l'effet des dépenses unitaires dans le secteur j sur la croissance de la production du secteur i . Les éléments du deuxième :

$$s_{ij} = \Delta Q_{i,t} / \Delta K_{j,t-1} \quad (i=1, \dots, n ; j=n+1, \dots, n+m) \quad (2.23)$$

mesurent la productivité marginale du capital. Les éléments du troisième :

$$s_{ij} = \Delta K_{i,t} / \Delta Q_{j,t-1} \quad (i=n+1, \dots, n+m ; j=1, \dots, n) \quad (2.24)$$

mesurent l'effet unitaire de la croissance de la production dans le secteur j sur la formation du capital. Enfin, les éléments du quatrième :

$$s_{ij} = \Delta K_{i,t} / \Delta K_{j,t-1} \quad (i=1, \dots, n ; j=n+1, \dots, n+m) \quad (2.25)$$

l'effet marginal de dépense de capital dans le secteur i pour la formation du capital dans le secteur j.

D'où les quatre types de multiplicateurs :

$$S_{11}^j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \quad (j=1, \dots, n) \quad \text{- multiplicateurs de la production des secteurs par rapport aux dépenses unitaires de production dans j} \quad (2.26)$$

$$S_{12}^j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \quad (j=n+1, \dots, n+m) \quad \text{- multiplicateurs de la production des secteurs par rapport aux dépenses unitaires du capital dans le secteur j} \quad (2.27)$$

$$S_{21}^j = \sum_{i=n+1}^{n+m} s_{ij} \quad (j=1, \dots, n) \quad \text{- multiplicateurs des capitaux par rapport aux dépenses unitaires de production dans le secteur j} \quad (2.28)$$

$$S_{22}^j = \sum_{i=n+1}^{n+m} s_{ij} \quad (j=n+1, \dots, n+m) \quad \text{- multiplicateurs des capitaux par rapport à l'accroissement unitaire du capital dans le secteur j} \quad (2.29)$$

A titre d'exemple, comparons des multiplicateurs S_{11}^j pour les années 1966 et 1972 à partir des matrices de la production élargie de l'U.R.S.S.

Tableau 2.3.

L'accroissement unitaire dans le secteur j	1972	1966
Agriculture	0,993	1,110
Energie	0,924	0,927
B.T.P.	0,726	0,678
Industries agro-alimentaires	0,360	0,440
Textile	0,487	0,489
Bois, meubles	0,713	0,697
Papier	0,529	0,521
Chimie	0,591	0,585
Cuir et chaussure	0,640	0,618
Matériel de construction	0,737	0,761
Métallurgie	0,519	0,538
Biens d'équipement	0,717	0,703
Equipement du transport	0,594	0,596
Transport	1,135	1,070
Commerce	1,313	1,229

L'efficacité moyenne (croissance de la production dans tous les secteurs par rapport à l'unité des dépenses de production et du capital) de la production en U.R.S.S. est augmentée de 1,376 en 1966 à 1,491 en 1972, c'est-à-dire de 8,4 %. Pourtant, il y a eu baisse d'efficacité dans certaines branches. La baisse d'efficacité de l'agriculture de 11 % se répercuta sur les I.A.A. (baisse de 18 % d'efficacité) et le textile, ce dernier n'ayant pas connu de croissance d'efficacité.

Il y avait aussi une baisse de l'efficacité de la production du matériel de construction (3 %) et de la production métallurgique (3,5 %).

Outre la comparaison d'efficacité économique d'un pays à des moments différents, qui est possible grâce à l'utilisation de la méthode d'adaptation, on peut comparer l'efficacité des différents facteurs pris en compte dans les modèles macroéconométriques de deux (plusieurs) systèmes économiques. Une analyse comparative de l'évolution économique de l'U.R.S.S. et des Etats-Unis entre 1955-1975 et en prévision entre 1980-2000 a été faite à l'IEOPIN à partir des modèles adaptatifs (LEVITSKY E.M. (1981)).

La méthode d'adaptation dans le modèle d'optimisation

Les méthodes d'optimisation des modèles économétriques n'utilisent habituellement pour atteindre un certain état que le jeu sur les variables "instruments" ou décisionnelles (Chow G.C. (1972)). Les coefficients structurels restent dans ces cas invariables ou changent d'après une règle exogène. La méthode adaptative permet de formuler le problème d'optimisation du modèle économétrique différemment.

Soit F_t - vecteur des variables du modèle

F_t^* - vecteur des variables, décrivant une trajectoire optimale moyenne de F_t
 $t = 0, 1, \dots, T$

La trajectoire optimale peut être choisie subjectivement en fonction du but suivi. Par exemple, on peut se servir de la trajectoire optimale équilibrée, c'est-à-dire la trajectoire qui est stationnaire, d'un côté, et optimale par rapport à une fonction "objectif" de l'autre. Pour la fonction objectif du problème dynamique, on peut prendre, comme précédemment, le minimum de la moyenne quadratique de la variation des variables calculées F_t autour des valeurs désirées F_t^* . On cherche pour la résolution de ce problème dynamique les coefficients structurels et les valeurs des variables leur correspondant qui satisferaient aux contraintes du modèle et à la fonction objectif (A) et (2.14) respectivement.

La solution du problème d'optimisation, décrit ainsi, donne :

- 1) la trajectoire d'évolution des variables du modèle ;
- 2) la trajectoire du changement des coefficients structurels.

Ces deux trajectoires sont lissées et permettent une interprétation économique plus riche, que l'optimisation sans adaptation.

La résolution expérimentale du modèle de l'IEOPIN d'optimisation appliqué à l'U.R.S.S. utilisant la méthode adaptative a été faite sous les conditions et dans les buts suivants :

- 1) le but était de faire le passage progressif du modèle à la trajectoire optimale équilibrée ;
- 2) l'année 1965 était l'année de base choisie ;
- 3) le passage sur la trajectoire optimale équilibrée se faisait sur une période de 10 ans (1966-1975) ;
- 4) sous la contrainte du volume d'emploi.

L'étape transitoire des calculs prévoit la définition de la trajectoire optimale équilibrée ⁽¹⁾.

Le vecteur F_t^* pour chaque année du passage a été calculé à partir de ces éléments (état final du système et les conditions 1)-4)).

Par la suite, dans le problème d'apprentissage optimal (2.14)-(A) on a remplacé le F_t^r par F_t^* et on a donné la formulation suivante au problème : ayant une trajectoire désirée, les vecteurs F_t^* , on cherche à calculer les coefficients structurels du modèle et les valeurs des variables de telle manière que la différence entre la trajectoire initiale, définie par les vecteurs F_t ($t = 1, \dots, 10$) et la trajectoire désirée soit la moindre au sens du minimum de la moyenne quadratique des écarts.

Donnons quelques illustrations des résultats obtenus à l'issue de la résolution du problème avec la méthode d'adaptation (Levitsky (1977) pp. 202-203).

(1) La définition de la trajectoire optimale équilibrée du modèle de l'IEOPIN est présentée dans l'annexe.

Tableau 2.4.

Valeur ajoutée (milliard de roubles)

Année	Ensemble de l'économie		Industrie		Agriculture	
	Simulation et projection	Optimum	Simulation et projection	Optimum	Simulation et projection	Optimum
1965	207	207	110	110	48	48
1966	230	243	116	129	54	60
1967	250	263	128	140	59	65
1968	270	285	140	152	64	70
1969	290	309	154	165	67	75
1970	321	335	158	179	67	81
1971	339	361	169	193	70	88
1972	350	390	181	208	73	94
1973	362	422	193	225	76	102
1974	385	457	205	243	80	109
1975	410	497	219	263	83	118

La valeur ajoutée en volume sur la trajectoire optimale est nettement supérieure à celle sur la trajectoire calculée. La différence augmente vers la fin de la période de passage à la trajectoire optimale équilibrée.

Le taux moyen de croissance sur la trajectoire de simulation avec les tendances passées représente 7,1 % pour l'ensemble de l'économie et pour l'industrie, et 5,6 % pour l'agriculture. Sur la trajectoire optimale, 9,1 % et 9,4 % respectivement.

./.

Tableau 2.5.

Capital fixe (milliard de roubles)

Année	Ensemble de l'économie		Industrie		Agriculture	
	Simulation et projection	Optimum	Simulation et projection	Optimum	Simulation et projection	Optimum
1965	305	305	159	159	62	62
1966	332	332	172	172	67	67
1967	361	360	188	187	73	73
1968	393	392	204	202	79	80
1969	430	426	223	220	87	87
1970	469	464	244	238	95	95
1971	511	505	265	259	104	104
1972	555	551	287	281	113	114
1973	601	601	311	305	123	126
1974	650	655	336	332	133	138
1975	700	715	362	361	142	152

Les volumes du capital fixe sont très semblables sur les deux trajectoires.

La comparaison du tableau 2.4 et du tableau 2.5 permet de conclure que sur la trajectoire optimale le rapport $\frac{K}{Q}$ est nettement moins fort que sur la trajectoire de simulation. Sur la trajectoire optimale, ce rapport ne représente à la fin de la période que 0.84 de celui sur l'autre trajectoire pour l'économie d'ensemble ; 0.83 pour l'industrie et 0.75 pour l'agriculture.

Une approche analogue pour analyser les performances macroéconomiques est présentée dans les études de R.C. FAIR (1978) et G.C. CHOW (1978). Les auteurs utilisent aussi la technique du contrôle optimal (stochastique dans l'étude de CHOW) pour résoudre le problème spécifique de l'optimisation.

Ainsi, les auteurs définissent les trajectoires optimales d'évolution pour les Etats-Unis, par exemple, sur la période 1954 I - 1974 II (FAIR R.C. (1978)), et les réalisations effectives pour la même période. Pour les réalisations, FAIR a choisi d'utiliser l'espérance mathématique du variable du modèle (plutôt que les observations des variables comme l'ont fait les chercheurs de l'IEOPIN). Le but de l'étude était l'analyse des conséquences de différentes politiques économiques, par période, leur rapprochement ou leur éloignement de la trajectoire optimale. Une fonction "des pertes" (par rapport à l'optimal) a été estimée dans cette perspective pour chaque trimestre.

Les paramètres du modèle sur la trajectoire optimale ont été estimés par la résolution du problème stochastique de la commande de l'état final, ce qui a permis d'évaluer l'impact des différents facteurs : volume de production ou les flux dans le jeu de rapprochement vers l'évolution à moindre perte.

On voit que dans les études utilisant la méthode d'adaptation (technique du contrôle optimal) le problème d'optimisation se pose en terme différent du problème habituel :

- 1) au départ, on ne spécifie pas une fonction objectif ;
- 2) on cherche à ce que la variation des paramètres renseigne sur les capacités d'un modèle contrôlé à suivre une trajectoire choisie a priori.

Ces renseignements présentent, entre autres, une analyse supplémentaire et synthétique du modèle empirique dynamique sur ses propriétés de stabilité et sensibilité, sur ses capacités de refléter le réel économique.

Certains auteurs (par exemple Deleau M., P. Malgrange (1975)) reconnaissent aux méthodes d'optimisation en général leurs capacités de complémentarité aux méthodes de simulations et leurs avantages certains de profondeur de l'analyse de la politique économique. A côté des problèmes "classiques" traités avec des méthodes "classiques" de l'optimisation on observe un intérêt croissant pour les applications économiques de la théorie du contrôle optimal et de ses développements. Ces techniques d'optimisation ne donnent pas, a priori, la politique à suivre (cette politique peut être erronée), mais définissent des fonctions objectifs, permettant d'avoir à comparer une classe de politiques optimales.

3. La méthode d'adaptation dans l'analyse prévisionnelle

Dans cette dernière partie du travail on discutera de l'adaptation en tant qu'instrument d'amélioration de la qualité des prévisions faites avec les modèles macroéconométriques. Nous laissons de côté le problème de la recherche de transformation optimum prospective d'un modèle économique. Nous nous arrêterons sur l'utilisation de la méthode pour dégager les lois cycliques de changement des paramètres et l'incorporation de ces lois dans le modèle de prévision. En termes d'évolution cyclique, on ne peut parler que de prévisions à court terme et le modèle économétrique doit être trimestriel.

Si on utilise la méthode d'adaptation pour estimer les paramètres du modèle trimestriel sur plusieurs années de la période rétrospective, on obtient des séries suffisamment longues des coefficients des équations économétriques du modèle.

Il est évident, qu'à partir de ces séries, on peut d'une façon ou d'une autre faire ressortir les tendances de leur évolution.

L'étape suivante consiste à introduire dans le modèle le mécanisme de calcul préalable des coefficients structurels pour chaque période (trimestre) prospective et l'estimation des variables du modèle avec ces coefficients. Dans ce cas la qualité des prévisions dépend dans les modèles adaptatifs :

- premièrement, comme dans tous les modèles économétriques, du choix des variables explicatives dans les équations économétriques, et
- deuxièmement, de l'aptitude du sous-modèle analysant l'évolution des coefficients à bien cerner les lois.

Les chercheurs de l'IEOPIN ont procédé à l'investigation de ce schéma d'analyse. Ils se fondaient sur le modèle économétrique trimestriel des Etats-Unis, comprenant 19 branches estimé sur la période 1954 I - 1971 IV. La méthode adaptative ⁽¹⁾ a servi à l'estimation dynamique des paramètres des équations économétriques suivantes :

- investissement en biens d'équipement,
- investissement en BTP,
- investissement en logement,
- consommation des ménages - courante
 - des biens durables
 - des services.

Pour chaque série de coefficients (chacune de 48 points) quatre modèles de tendance conjoncturelle avec les schémas autorécurrents de plusieurs ordres (jusqu'au huitième) ont été testés :

$$\alpha'_t = \frac{c_1/t + c_0}{c_1 t + c_0} + \sum_{k=1}^{\ell} b_k \alpha_{t-k} + e_t ; \quad (2.30)$$

$$c_1 \text{ cnt} + c_0$$

(1) Pour la procédure de l'adaptation, le même schéma (c'est-à-dire le problème d'apprentissage avec les mêmes caractéristiques ((A)-(2.14)) a été choisi que pour le modèle au pas annuel.

Les valeurs des coefficients estimés α'_t ont été comparées à celles des coefficients adaptatifs du macromodèle. Et selon qu'un des modèles (2.30) était conforme aux critères statistiques ⁽¹⁾, il était retenu pour l'estimation en dynamique du coefficient en question.

En incorporant les modèles statistiques (2.30) dans le modèle macro-économique les chercheurs de l'IEOPIN (LEVITSKY (1981)) ont fait deux expérimentations :

- 1) Prévision économique pour les Etats-Unis durant la période 1976-1985. Les séries de bases pour l'estimation des modèles statistiques (2.30) couvraient la période 1955-1975 ;
- 2) Simulation de la crise aux Etats-Unis, c'est-à-dire simulation d'évolution économique durant 1973-1977. Les séries de base couvraient 1955 à 1972.

Les dernières expérimentations ont été accomplies de deux manières :

- a) Les facteurs explicatifs dans les équations économétriques étaient pris égaux à leurs valeurs observées (c'est-à-dire comme des variables exogènes). Ainsi, la qualité de prévision était jugée par le seul fait de la prise en compte de la variation des coefficients
- b) Le modèle fonctionnait normalement (les facteurs des régressions étaient les variables endogènes du modèle). En conséquence, on analysait les particularités d'un modèle de simulation avec les coefficients structurels changeants dans le contexte de l'évolution cyclique.

Les résultats des prévisions étaient chaque fois comparés aux prévisions faites avec le même modèle mais avec les coefficients constants et aux prévisions faites aux Etats-Unis par K. ALMON (Interindustry Forecasting Project University of Maryland, Summary Tables and Matrix Listing (1978)).

(1) Ces critères étaient :

a) critère de Theil

$$\frac{\sum_{t=1}^T [(\alpha_t - \alpha_{t-1}) - (\alpha'_t - \alpha'_{t-1})]^2}{\sum_{t=1}^T (\alpha_t - \alpha_{t-1})^2}$$

b) l'écart moyen absolu

$$\left(\frac{\sum_{t=1}^T |\alpha_t - \alpha'_t|}{\sum_{t=1}^T \alpha_t} \right) \cdot 100^\circ$$

c) dispersion des écarts

d) un test supplémentaire vérifie si la série des écarts ($\alpha''_t = \alpha_t - \alpha'_t$) est une suite des valeurs aléatoires indépendantes avec la même distribution et la moyenne égale à zéro.

Il est apparu que les simulations rétrospectives sur la période 1973-1977 dans la variante a) ne donnent l'avantage au modèle avec les coefficients changeants que dans la moitié des cas (pour 3 fonctions des 6 (voir page 33)). Les résultats sont sensiblement plus favorables pour la méthode de l'adaptation dans son utilisation complète (variante b)) car pour 4 fonctions des 6 elle permet de meilleurs résultats, mais surtout parce qu'elle diminue fortement l'écart entre les estimations et les observations (pour ces 4 fonctions).

La comparaison des prévisions faites à l'IEOPIN avec celles de K. ALMON apporte assez peu, à notre avis, d'informations pour porter un jugement sur la qualité de la méthode d'adaptation, car le modèle d'ALMON est en question lui aussi.

Conclusion

L'accroissement de la quantité des publications traitant les problèmes d'adaptation en économie démontre que cette méthode de conception des modèles devient une partie intégrale des méthodes d'économie mathématique. On remarque que dans ce domaine les économistes, surtout américains et soviétiques, ont progressé les dernières années non seulement sur le plan théorique mais aussi en appliquant la méthode d'adaptation à des modèles empiriques. L'expérience de l'utilisation de la méthode paraît être fructueuse.

Ce texte, avec toutes ses insuffisances, donne un aperçu de l'état de connaissance de ces méthodes en économie et des matériaux pour leur utilisation dans l'analyse des facteurs de croissance économique, dans la modélisation d'évolution cyclique et des simulations prévisionnelles.

Entre autres, une analyse plus détaillée des travaux des chercheurs de Novossibirsk doit permettre notamment au lecteur n'ayant pas accès à la langue russe de connaître les résultats d'une des premières applications de ces méthodes dans les macromodèles.

Il ressort cependant qu'une analyse plus profonde reste à faire pour comprendre dans quel cas une approche adaptative d'estimation des paramètres du modèle peut être préférable à une approche économétrique.

Annexe

La définition de la trajectoire optimale
équilibrée du modèle de l'IEOPIN

1) L'état d'équilibre généralisé du modèle

Le modèle économétrique en forme réduite

$$Z_t = S Z_{t-1} \quad (A.1)$$

est un modèle de von Neumann (Neumann (1945), Dadaian (1973), Morishima (1964)) dans lequel la matrice unitaire est la matrice d'input et S la matrice d'output. Le nombre des processus de production est égal au nombre des produits. Chaque processus de production produit un seul produit qui est utilisé à son tour dans la production des autres produits.

Le processus de production décrit par (A.1) est défini par le couple des vecteurs non négatifs (Z_{t-1}, Z_t) . Z_{t-1} est le vecteur d'input et Z_t le vecteur d'output. Le modèle (A.1) est fermé : tout ce qui est produit par le système (output) à t-1 devient input à la période suivante.

Soit $\lambda_j (Z_{t-1}, Z_t)$ le taux de croissance de la production j dans le processus (Z_{t-1}, Z_t) à t.

Le taux de croissance technologique à t du processus (Z_{t-1}, Z_t) est défini, alors, ainsi

$$\lambda (Z_{t-1}, Z_t) = \min_j \lambda_j (Z_{t-1}, Z_t)$$

D'après la définition du processus (Z_{t-1}, Z_t) et le modèle (A.1) le taux de croissance est toujours défini et est un nombre réel.

Le taux de croissance technologique du modèle (A.1) à t est :

$$\lambda_t = \max \lambda (Z_{t-1}, Z_t)$$

./.

Soit $(Z_{t-1}, Z_t) \in M_t$ - l'espace de la production du modèle.
Si l'espace de production du modèle (A.1) pour un intervalle de temps fini
 T ($t = 0, 1, \dots, T$) est limité, c'est-à-dire

$\forall t \in [0, T]$ et $\forall (Z_{t-1}, Z_t) \in M_t$ on a

$$\sum_{j=1}^s Z_{j,t} \leq C_t \quad \text{où } C_t > 0,$$

$\lambda_t = \lambda$ est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\lambda = \max \{ \gamma \}$$

$$\gamma Z \leq SZ$$

$$Z \geq 0$$

(A.2)

Si la matrice S a une valeur propre maximale et positive et un vecteur propre
 $Z \geq 0$, ils deviennent les solutions du problème (A.2).

Introduisons le vecteur P_t , qui peut être interprété comme le
vecteur des prix. Alors, symétriquement au précédent, le taux de croissance
économique du processus de production (Z_{t-1}, Z_t) peut être défini comme ceci :

$$\mu(Z_{t-1}, Z_t, P_{t-1}, P_t) = Z_t P_t / Z_{t-1}, P_{t-1}$$

Supposons :

$$\mu(P_{t-1}, P_t) = \max \mu(Z_{t-1}, Z_t, P_{t-1}, P_t),$$

$$(Z_{t-1}, Z_t) \in M_t$$

$\mu(P_{t-1}, P_t)$ est le taux maximal de croissance des prix des produits dans
le modèle, ayant le système de prix (P_{t-1}, P_t) .

Alors l'équation :

$$\mu_t = \min_{(P_{t-1}, P_t)} \mu(P_{t-1}, P_t)$$

peut être interprétée comme le taux de croissance économique du modèle (A.1)
à t .

./.

La matrice S dans le modèle (A.1) (sans les deux dernières colonnes correspondant aux coefficients du facteur du temps t et de la constante) peut contenir des éléments négatifs dans les deux blocs ((2.23) et (2.25) voir ces équations dans le chapitre II) mesurant la productivité marginale du capital et l'effet marginal de dépense de capital dans la formation du capital. Pour cette matrice carrée

$S = \{ s_{ij} \}$ telle que

$$\forall i \sum_{j=1}^S s_{ij} > 0$$

on trouve $\lambda = 0$, qui est une solution du problème

$$\lambda = \max \{ \gamma > 0 / \gamma Z \leq SZ, Z > 0 \} \quad (\text{Levitsky (1977)}).$$

Par contre, le problème dual

$$\mu = \min \{ \delta > 0 / PS \leq \delta P, P \geq 0 \} \quad (\text{A.3})$$

n'a pas de solution dans le modèle (A.1) avec sa matrice S.

Ainsi, pour le modèle (A.1) on n'a pas d'état d'équilibre de Neumann, car on ne peut pas démontrer l'égalité $\lambda = \mu$.

Pour les modèles, ayant la matrice S avec des éléments négatifs⁽¹⁾ on définit l'état d'équilibre généralisé.

Si on inverse le signe devant les éléments négatifs dans les colonnes et dans les lignes correspondantes, on obtient une matrice S^- , qui correspond à un système des éléments, dite conjuguée du système (A.1) et qui soit elle-même conjuguée à la matrice S.

La valeur propre maximale de la matrice S avec le passage au système conjugué ne change pas. Mais le problème dual (A.3) pour le système avec la matrice S^- a une solution.

(1) Remarquons que les coefficients négatifs correspondent 1°) soit aux facteurs du capital non productif, qui ne participe pas explicitement dans la production, mais nécessite des dépenses des produits du système ; 2°) soit du capital accumulé en quantité supérieure à la nécessité de la production.

Soit $S = \{ s_{ij} \}$ $i, j = 1, \dots, s$ matrice carrée, telle que pour la matrice conjuguée, on a

$$\forall j \sum_{i=1}^s \bar{s}_{ij} > 0$$

Alors il existe $\mu > 0$ qui est la solution du problème :

$$\mu = \min \{ \delta / PS^{-1} \leq \delta P ; P \geq 0 \}$$

où S^{-1} une matrice conjuguée à la matrice S .

Soit l'ensemble de vecteurs

$$\mathcal{P} = \{ P / p_i > 0, \forall i \in J_1 \text{ et } p_i < 0, \forall i \in J_2 \}$$

$$\text{où } J_1 = \{ j / s_{ij} \geq 0 \}$$

$$J_2 = \{ j / s_{ij} < 0 \}$$

$$\{ s_{ij} \} = S$$

Définition 1 : La valeur $\bar{\lambda} > 0$, le vecteur des intensités $\bar{Z} > 0$ et vecteur $P \in \mathcal{P}$ déterminent l'état d'équilibre généralisé du modèle (II.1), si les équations suivantes ne sont pas contradictoires

$$\bar{\lambda} \bar{Z} = S \bar{Z}$$

$$\bar{\lambda} P = \bar{P} S.$$

Définition 2 : La valeur $\bar{\lambda} > 0$, le vecteur des intensités $\bar{Z} \geq 0$ et (équivalent vecteur $\bar{P} > 0$ déterminent l'état d'équilibre généralisé à la définition 1) du modèle (2.19), si simultanément se réalisent les deux équations suivantes

$$\bar{\lambda} \bar{Z} = S \bar{Z}$$

$$\bar{\lambda} P = \bar{P} S^{-1}.$$

Théorème :

L'état d'équilibre généralisé du modèle $Z_t = S Z_{t-1}$ existe, quand $p_j < 0$ ($j \in J_2$). Si $p_j = 0$ ($j \in J_2$), l'état d'équilibre trouble. (Démonstration du théorème, voir Levitsky (1977) p.190).

2) La trajectoire optimale équilibrée

Pour le modèle (A.1) qui a l'état d'équilibre généralisé, la trajectoire optimale équilibrée Z_t représente une trajectoire qui est :

- 1) optimale par rapport à une certaine fonction objectif ; et
- 2) stationnaire, c'est-à-dire

$$Z_{t+1}/Z_t = \lambda$$

pour un certain $\lambda > 0$ et $\forall t$.

La trajectoire optimale équilibrée est une trajectoire vers laquelle converge toute trajectoire optimale quel que soit son état initial. Plusieurs théorèmes de la trajectoire optimale équilibrée étaient établis, pour les modèles de type Neumann, Léontief, néoclassiques et autres. Tous ces modèles ont une structure technologique constante. Dans les modèles du type (A.1) élaborés par l'IEOPIN les éléments de la matrice S sont constants ; c'est pourquoi la trajectoire optimale équilibrée caractérise le taux de croissance et la structure de l'économie par rapport à un moment donné.

Théorème :

Soit $\{\hat{Z}_t\}$ la trajectoire optimale du modèle (A.1) (type Neumann)
 $\bar{Z}_t = \bar{\lambda}^t \bar{Z}$ - la trajectoire optimale équilibrée du modèle (A.1)

où \bar{Z} - le vecteur équilibré des intensités

$\bar{\lambda}$ - la plus grande valeur propre réelle de la matrice S, ou son module si elle est complexe.

./.

Alors pour tout $\epsilon > 0$ on trouvera $T_0 > 0$ dépendant de ϵ tel que la condition $|\hat{Z}_t - \bar{Z}_t| \leq \epsilon$ se réalise pour $t = T_0, \dots, T$.

Le même théorème peut être formulé en termes de taux de croissance.

Soit $\bar{\lambda}_t$ - taux de croissance sur une trajectoire optimale

$$\hat{\lambda}_t = \min_{1 \leq k \leq s} (\hat{Z}_{k,t} / \hat{Z}_{k,t-1})$$

et $\bar{\lambda}$ - taux de croissance sur la trajectoire optimale équilibrée, alors pour tout $\epsilon > 0$ on trouvera $T_0, 0 < T_0 < T$ tel que la condition $|\hat{\lambda}_t - \bar{\lambda}_t| \leq \epsilon$ se réalise pour tout $t \geq T_0$.

BIBLIOGRAPHIE

AAGAARD Svendsen R. (1976)

Application of Kalman Feltering Methods to a Macroeconomic model of the Danish Economy, Oct., IMSOR, Technical University of Denmark, Lyngby.

ATHANS M. (1974)

The importance of Kalman filtering methods for economic systems, Annals of Economic and Social Measurement 3, N 1.

AUBIN J.P., DAY R.H. (1980)

Homeostatic trajectories for a class of adapting systems, Journal of Economic Dynamics and Control, V 2.

BELLMAN R. (1961)

Adaptative Control Process, A Guided Tour, Princeton.

BOX G.E.P. et JENKINS G.M. (1962)

Some statistical aspects of adaptative optimization and control, J. of the Royal Stat. Soc., Ser. B, vol. 24 N 2.

BROWN R.G., MEYER R.F. (1961)

The fundamental theorem of exponential smoothing, Oper. Res. Vol.9 N 5.

BROWN R.G. (1963)

Smoothing forecasting and prediction of discrete time series, N Y.

CHOW W.M. (1965)

Adaptative control of the exponential smoothing constant, J. of Indust. Engineering, Vol. 16, N 5.

CHOW G.C. (1978)

Evaluation of macroeconomic policies by stochastic control techniques, International Economic Review, Vol. 19, N 2.

DAY R.H. (1975)

Adaptative Processes and Economic Theory, in : R.H. DAY, T. GROVES (eds) Adaptative economic models, Academic Press, N.Y., San Francisca, London.

DAY R.H. (1979)

Understanding the development of world agriculture : insights from adaptative economics, Research paper 7912, Univ. of Sothern California, Los Angeles.

DAY R., CIGNO A. (1978)

Modelling Economic Change : the recursive programming Approach, Amsterdam, North-Holland Publishing Co.

DELEAU M., MALGRANGE P. (1974)

Les modèles macroéconomiques empiriques, Analyse et Optimisation.
Rapport final CORDES.

FAIR R.C. (1978)

The Use of Optimal Control Techniques to Measure Economic Performance,
Int. Ec. Review, June, vol. 19.

FELDBAUM A.A. (1966)

Les fondements de la théorie des systèmes automatiques optimaux,
Moscou (en russe).

FU K.S. (1968)

Sequential methods in pattern recognition and machine learning,
N.Y., London.

GRAY M.R., TURNOVSKY S.J. (1980)

The consistent specification of adaptative expectations in continuous
time models, Journal of Economic Dynamics and Control, N 2.

HELMER J.V. (1972)

La commande optimale en économie, Dunod, Paris.

IOUDIN D.B. (1979)

Les problèmes et méthodes de la programmation stochastique, Moscou
(en russe).

KALMAN R.E. (1960)

A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,
Journal of Basic Engineering.

KALMAN R.E., BUCY R.S. (1961)

New results in linear filtering and prediction theory,
J. of Basic Engineering, vol. 83 D.

KENDRICK D.A., KANG B.H. (1975)

An economist's guide to wide sense dual control, Project on control
in economics, University of Texas, Working Paper n° 75.

KENDRICK D.A. (1977)

Adaptative Control of Macroeconomic Models with Measurement Error,
in : HOLLY S. et all. (eds) Optimal Control of Econometric Models :
An Approach to Economic Policy Formation, Macmillan Publishing N.Y.

KENDRICK D.A. (1981)

Control Theory with Application to Economics,
in : ARROW K.J., INTRILIGATOR M.D. (eds) Handbook of Mathematical
Economics, North Holland Publishing Co, Amsterdam.

KENDRICK D.A. (1979) (eds)

Control Theory and Econometric Models.

- KUSHNER H.J., CLARK D.S. (1978)
Stochastic Approximation Method for Constrained and Unconstrained Systems, Springer, Verlag.
- LAWSON T. (1980)
Adaptative Expectations and Uncertainty,
Review of Economic Studies, vol XLVII, N 147.
- LEVITSKY E.M. (1977)
Adaptation dans la modélisation des systèmes économiques,
Novossibirsk (en russe).
- LEVITSKY E.M., TCHERNIN E.A. (1977)
Modèle trimestriel entrée-sortie adaptatif de l'économie des Etats-
Unis, Dans VALTOUKH K.K., ITSKOVICH I.A. (eds).
- LEVITSKY E.M. (1979)
Utilisation des modèles économétriques adaptatifs dans l'analyse
de comparaison, dans : LEVITSKY E.M., TCHIJOV U.A. (eds).
- LEVITSKY E.M., BONDARENKO N.A., PIROJKOV S.M., TCHERNIN E.A. (1979)
L'approche adaptative de l'analyse de la dynamique de l'efficacité
des facteurs et du degré de leur influence sur la croissance des
indicateurs économiques du modèle dans : LEVITSKY E.M., TCHIJOV U.A.
(eds).
- LEVITSKY E.M., TCHIJOV U.A. (1979)
Modélisation Econométrique, Académie des Sciences, Novossibirsk.
- LEVITSKY E.M. (1981)
Les modèles adaptatifs économétriques (en russe), Novossibirsk.
- LOUKACHIN I.P. (1979)
Les méthodes d'adaptation pour les prévisions à court terme,
Moscou "Statistica" (en russe).
- MACRAE E.C. (1975)
An Adaptative Learning Rule for Multiperiod Decision Problems,
Econometrica 43, N 5-6.
- OUDET B.A. (1975)
Etude de la dynamique déterministe à court terme des modèles
macroéconomiques : Application au Modèle STAR.
Laboratoire d'informatique de Grenoble.
- PACKER A.A. (1972)
Models of economic systems, A theory for their development and use,
M.I.T.
- PAU L.F. (1979)
Research on optimal control adapted to macro and microeconomics :
A Survey, Jour. of Economic Dynamics and Control, Vol. 1, N 3.

- PEAUCELLE I. (1979)
La méthode d'adaptation dans les modèles économiques, Analyse de quelques approches, Rapport CORDES (Subvention n° 181-78).
- RAO A.G., SHAPIRO A. (1970)
Adaptative smoothing using evolutionary spectra, Management Science, vol. 17, N 3.
- ROBBINS H., MONRO S. (1951)
A Stochastic Approximation Method, Ann. Math. Statist. Vol. 22.
- SWORDER D. (1966)
Optimal adaptative control systems, Academic Press, N.Y.
- THEIL H., WAGE S. (1964)
Some observations on adaptative forecasting, Management Science, Vol. 10, N 2.
- TRIGG D.W., LEACH A.G. (1976)
Exponential smoothing with an adaptative response rate, Oper. Res. Quart. Vol 18, N 1.
- TSYPKIN I.Z. (1967)
Probleme der Adaption in Automatishe Systemen, Messen, Steuern, Regeln, Jg. 10, N 10.
- TSYPKIN I.Z. (1968)
Adaptation et apprentissage dans les systèmes automatiques, Moscou (en russe).
- TSYPKIN I.Z. (1970)
Les fondements de la théorie des systèmes autoadaptatifs, Moscou (en russe).
- VISHWAKARMA K. (1974)
Macroeconomic regulation : Control system incorporating the Kalman filter for the Netherlands, Rotterdam University Press.