N° 2000 – 04
Croissance par Division du Travail

Xavier RAGOT[1]

CEPREMAP, 142 rue du Chevaleret
75013 PARIS, FRANCE.
e-mail : xavier.ragot@cepremap.cnrs.fr
tel : 01 40 77 84 94.
N° 2000 – 04

28 février 2001

[1]L'auteur tient à remercier Robert Boyer, Régis Breton et Fabrice Collard pour leurs précieux conseils. Toute erreur restante est bien sûr de la seule responsabilité de l'auteur.

Croissance par division du travail.

Résumé :

Cet article présente un mécanisme de croissance fondé sur le changement auto-entretenue de la division du travail. La division du travail a lieu au sein des firmes. Elle engendre des gains de productivité dans la firme, mais elle est limitée par les coûts de coordination. La division du travail dans la firme donne lieu à la possibilité d'introduire de nouveaux biens capitaux produits par des firmes, qui peuvent elles-aussi diviser le travail. Ce processus cumulatif d'augmentation du nombre de tâches réalisées au sein des firmes aboutit à un modèle de croissance par l'augmentation des détours de production. L'étude de la division optimale du travail montre que l'équilibre décentralisé n'alloue pas assez de ressources à la coordination de la division du travail.

Growth by Division of Labour

Abstract :

This paper presents a growth model based on continuous increases in division of labour. Division of labour takes place within each firm. It raises the productivity of workers but it is limited by coordination costs. This division of labour generates innovation opportunities and allow for the introduction of new types of capital goods, which are produced by firms which divide work again. The continuous increase in the number of tasks performed within firms generates a balanced growth, because of the increase in the 'roundaboutness' of the production method. We show that the market equilibrium generates a balanced growth path and that it allocates to few resources to the coordination of division of labour.

JEL : L23, O30, O40.
Mots Clés : division du travail, croissance, changement technique.
Keywords : division of labor, growth, technical change.

1 Introduction

Dans la plupart des modèles de croissance fondés sur le changement technique endogène, parmi lesquels Romer [1990], Grossman et Helpman [1991], Aghion et Howitt [1992], la croissance est issue de la recherche d'innovations permettant la production de nouveaux biens capitaux. L'acquisition de ceux-ci permet aux firmes d'accroître leur productivité. En effet, le progrès technique est incorporé à ces biens. Ces modèles ont d'abord supposé une relation linéaire entre les ressources allouées à l'innovation et la probabilité de découverte de nouvelles innovations. Cette modélisation du progrès technique a suscité deux critiques principales. Tout d'abord, Jones [1995] et [1999] montre que ces modèles présentent des effets d'échelle : le taux de croissance est une fonction linéaire de la taille de la population, ce qui n'est pas observé dans les faits. Cette critique a donné lieu à de nouveaux modèles de croissance sans effets d'échelles, comme ceux de Eicher et Turnovsky [1999], Jones[1999], Segerstrom [1998], ou Young [1998], qui approfondissent l'étude des déterminants de l'innovation. Segerstrom [1998] suppose que les innovations sont de plus en plus difficiles, au fur et à mesure que le stock de connaissance augmente. Young [1998], reprenant l'idée de Gilfillan, insiste sur la possibilité d' 'innovations équivalentes' : différentes innovations peuvent être les variantes d'une solution à un même problème. Dans ce cas, après la première innovation, les suivantes entraînent un partage de la rente du premier producteur mais n'augmente pas la productivité. Young [1998] et Howitt[1999] résolvent ce problème en introduisant deux types d'innovations. Cet article s'inscrit dans cette réflexion des déterminants de l'innovation et, s'inspirant d'Adam Smith, modélise le processus qui engendre les opportunités d'innovation, plutôt que le mécanisme d'allocation de ressources au secteur de recherche et développement. Cette distinction renvoie à deux théories du changement technique : soit celui-ci est déterminé par les découvertes scientifiques technologiques ('technology push')La difficulté est alors d'expliquer simplement la dynamique de ces opportunités, au sein des interdépendances complexes (voir Rosemberg [1982] et Amable, Barré et Boyer [1997] pour une discussion empirique). En partant des intuitions d'Adam Smith et de Young [1928], cet article montre que la division du travail permet d'expliquer la dynamique endogène des opportunités d'innovation.

En effet, pour Smith, la division du travail produit trois principaux effets : premièrement elle accroît la dextérité des travailleurs qui peuvent se concentrer sur un nombre limité de tâches, elle économise le temps de passage d'une tâche à l'autre ; enfin elle permet l'introduction de nouvelles machines une fois que les tâches sont suffisamment simplifiées. Les études précédentes de la division du travail ont surtout analysé le premier effet qui insiste sur les gains issus de la spécialisation (Yang et Borland [1993], Becker et Murphy [1992]). Cependant, Young [1928] note que le troisième effet, qui relie la division du travail et l'introduction de nouveaux biens capitaux est le plus important. L'introduction de nouveaux biens capitaux, suite à des opportunités d'investissement créées par la division du travail, entraîne l'apparition dans l'économie de nouvelles tâches qui n'existaient pas auparavant. Cela correspond à l'aspect créateur des marchés, fortement souligné par Kaldor [1972] Ainsi, l'apparition de nouveaux biens capitaux permet une nouvelle division des tâches qui autorise à son tour l'introduction de nouveaux biens capitaux. Pour reprendre l'exemple de Young, si l'on doit planter un clou, on peut le faire par des moyens rudimentaires. Cependant, si on doit le faire plus souvent on fabriquera un marteau. La fabrication du marteau donnera lieu elle-même à l'introduction de biens capitaux. Ce type d'innovations, de nature incrémentale (Amable [1996]), correspond à la vision du progrès technique de Gilfillan [1970] : "une innovation importante est une perpétuelle addition de petits détails, n'ayant ni début ni fin, ni limites définissables.". Cet article montre que ce type d'innovations engendre une croissance du produit par tête du fait de la transmission des gains de productivité par l'intermédiaire du système de prix.

Le mécanisme à l'origine de la croissance est donc une causalité circulaire entre division du travail et introduction de biens capitaux. Chaque firme choisit sa division interne du travail. Celle-ci augmente la productivité du travail mais elle est limitée par les coûts d'organisation et de gestion de l'information (Coase [1937], Bolton et Dewatripont [1994]). La division du travail engendre des tâches qui sont progressivement mécanisées du fait de l'arrivée de nouvelles firmes qui produisent de nouveaux biens capitaux. L'apparition de nouvelles firmes modifie la division externe du travail, c'est à dire la division du travail entre les firmes. Les nouvelles firmes choisissent une division interne du travail, donnant lieu elle aussi à des opportunités d'investissement.

L'aspect créateur de la division du travail distingue ce modèle d'autres modèles de division du travail. Yang et Borland [1993] modélisent un processus de croissance par division du travail. Les agents doivent accomplir un nombre fixé de tâches, soit directement, soit en achetant les biens qui les dispensent de réaliser eux-mêmes les tâches. La croissance découle des gains de productivité engendrés par la spécialisation progressive des agents. La différence essentielle de ce modèle avec celui de Yang et Borland est que le nombre de tâches n'est pas donné à priori mais augmente avec l'apparition de nouveaux biens. De plus, le mécanisme de la croissance n'est pas la spécialisation des agents mais repose sur les gains de productivité engendrés par la différenciation des biens capitaux utilisés dans l'économie, comme dans Romer [1990].

L'évolution du nombre de biens capitaux distingue aussi ce modèle du modèle de Becker et Murphy [1992] qui modélisent la division du travail par le travail en équipe. Comme celle-ci est déterminée par les coûts de coordination et l'accumulation de capital humain, ils trouvent que le capital humain est un déterminant fondamental de la division du travail et de la croisance. On montre ici que la dynamique technologique suffit à engendrer la croissance sans supposer l'accumulation de capital humain.

Kelly [1997] montre dans un cas général que la vision de Smith de la croissance engendre un processus discontinu de croissance avec effet de seuil. Ce modèle possède cette propriété sous la forme d'une trappe à pauvreté. Une taille du marché minimum est nécessaire pour permettre une croissance auto-entretenue.

Le modèle avec un marché du travail concurrentiel engendre deux résultats principaux. Le premier concerne l'existence de fonction de production sectorielle à rendements croissants, sans que ces rendements apparaissent au niveau de la firme. L'apparition de rendements croissants lorsque le niveau d'aggrégation augmente de la firme au secteur est noté par Basu et Fernald [1997]. Le modèle montre que ce résultat vient de l'apparition endogène de nouveau biens capitaux. Au niveau macroéconomique cependant, le modèle complet de croissance endogène ne présente pas d'effets d'échelle quant à la population. Le taux de croissance de l'économie dépend du taux de croissance de la population et non de sa taille. Celle-ci n'a qu'un effet transitoire sur le taux de croissance. L'étude de l'allocation du planificateur central montre que l'équilibre décentralisé a un taux de croissance de long terme qui est optimal, mais une dynamique transitoire non optimale. Ce résultat se retrouve dans le modèle de Segerstrom [1998]. On montre par ailleurs que l'économie décentralisée alloue trop peu de ressources à la coordination de la division du travail.

Dans une première section, nous modélisons la division du travail dans une firme. La seconde section modélise l'apparition de nouvelles firmes en équilibre partiel. La troisième section présente le modèle de croissance endogène. Ce modèle est d'abord étudié avec un marché du travail compétitif, puis en présence de négociations salariales au sein de chaque entreprise. La dernière section étudie le programme du planificateur central. La conclusion résume les résultats.

2 Division du travail au sein des firmes.

L'utilité des ménages dépend linéairement de leur consommation. Leur utilité intertemporelle s'écrit

$$u = \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^{\tau} c_{\tau}$$

avec $\beta = (1+r)^{-1}$. La constante r est le taux de préférence pour le présent. c_τ est la consommation totale de la population. A la période t, celle-ci est de taille L_t et croît à un taux u constant.

La production du bien final dépend d'un continuum de longueur m de biens intermédiaires. La fonction de production du bien final est à rendements décroissants

$$Y = \int_{i=0}^{m} q_i^{\frac{s-1}{s}} di \tag{1}$$

En prenant le prix du bien final comme numéraire, et en notant P_i le prix du bien intermédiaire i, le programme du producteur du bien final est $\max_{q_i} \int_{i=0}^{m} q_i^{\frac{s-1}{s}} di - P_i q_i$, ce qui donne la fonction de demande inverse pour les m producteurs de biens intermédiaires

$$P(q) = \left(\frac{s-1}{s}\right) q^{-\frac{1}{s}} \tag{2}$$

Chaque firme qui produit un bien intermédiaire choisit sa division du travail. Une firme peut produire avec une seule tâche. La fonction de production à rendements constants prend la forme $f(x) = x$, où x est la quantité de travail allouée à cette tâche. La quantité produite q est donc simplement $q = x$. La tâche unique peut être divisée en un continuum de tâches de longueur n. Le paramètre n sera constant et exogène dans tout le modèle. Chaque tâche se divisera donc de la même manière. La production est maintenant une fonction du temps alloué à chaque sous tâche x_i avec $1 \leq i \leq n$:

$$q = n^{\gamma - \frac{1}{s-1}} \left(\int_{i=0}^{n} x_i^{\frac{s-1}{s}} di \right)^{\frac{s}{s-1}}$$

Les différentes tâches se combinent avec une élasticité de substitution constante. Suite aux travaux de Bénassy (1996), γ est la mesure correcte de l'influence de la division du travail sur la productivité du travail. En effet, lorsque le travail n'est pas divisé, la quantité produite par une unité de temps est 1. Après la division du travail, la production la plus grande est obtenue en allouant $1/n$ unité de travail à chaque tâche. La quantité produite par une unité de temps est alors $n^{\gamma} > 1$. Les gains sont d'autant plus grands que n est grand et que γ est grand. La division du travail est dite à l'ordre 1.

Cette forme de division du travail modélise en même temps la subdivision d'une tâche en n tâches différentes, et l'apparition d'un détour de production. Pour reprendre la métaphore de Young(1928), si la tâche est de planter un bout de métal, ce que l'on faisait avec des moyens sommaires, la division en sous tâche peut être de fabriquer un marteau, et de transformer le bout de métal en clou, etc... Les nouvelles tâches ne sont pas forcément incluses dans la tâche que l'on divise. Ainsi, si l'on accepte la conception de Young de la division du travail, comme incorporation dans de nouveaux objets, le terme de « subdivision du travail » peut être trompeur, car dans la division du travail apparaît de nouvelles tâches qui n'existaient pas auparavant.

La division du travail à l'ordre 2 consiste en la division de chaque tâche x_i en un continuum de n tâches. Cela peut être représenté formellement par $x_i = n^{\gamma - \frac{1}{s-1}} \left(\int_{k=0}^{n} x_{i,k}^{\frac{s-1}{s}} dk \right)^{\frac{s}{s-1}}$. La fonction de production devient $q = n^{2\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left(\int_{i=0}^{n} \int_{k=0}^{n} x_{i,k}^{\frac{s-1}{s}} di\, dk \right)^{\frac{s}{s-1}}$. La division du travail à l'ordre p est la division de chaque tâche en sous tâches p fois. La fonction de production dépend alors de n^p termes, qui sont les temps de travail alloués aux n^p tâches, et est égale à $q = n^{p\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left(\int_{i_1=0}^{n} \dots \int_{i_p=0}^{n} x_{i_1,\dots,i_p}^{\frac{s-1}{s}} di_1, ...di_p \right)^{\frac{s}{s-1}}$. En utilisant un seul indice

$$q = n^{p\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left(\int_{0}^{n^p} x_i^{\frac{s-1}{s}} di \right)^{\frac{s}{s-1}} \qquad (3)$$

La division du travail augmente la productivité du travail, mais elle ne peut se faire sans coûts. Pour Coase (1937) la fonction d'organisation de l'entrepreneur connaît des rendements décroissants. L'économie de l'information montre que ces coûts sont induits par le problème de l'aquisition et de la circulation de l'information dans l'entreprise(Bolton et Dewatripont (1994)).

Les coûts d'organisation et de gestion de l'information sont représentés par une fonction croissante de la division du travail de la forme $h(n+1)^p$. L'intuition économique de cette expression est la suivante : pour chaque tâche effectuée, il y a un temps mort h nécessaire pour acquérir les informations sur le contenu de son travail, de plus, une tâche supplémentaire de même durée h est nécessaire pour coordonner les autres tâches. Ainsi à chaque division le nombre de tâches consacrées à l'organisation est multipliée par $n+1$. Comme chacune d'elle dure un temps h, on retrouve l'expression $h(n+1)^p$. Le modèle ne dépend pas de cette hypothèse. N'importe quel coût de coordination de la forme hm^p, avec $m > n$ aboutit aux mêmes résultats

En notant p_1 la division interne du travail des firmes qui venden les biens intermédiaires, le profit d'une entreprise au sein du continuum est

$$\pi(p_1, x_i) = P(q)q - \int_0^{n^{p_1}} x_i w \; di - hw(n+1)^{p_1} \text{ où } 0 \leq i \leq n^{p_1}$$

avec la fonction de production (3) et la fonction de demande inverse (2). Le salaire horaire w est commun à tous les salariés. La maximisation du profit $\max_{p,x_i} \pi(p_1, x_i)$, $0 \leq i \leq n^p$ détermine les demandes de travail x_i pour chaque tâche et la profondeur p_1 de la division du travail

$$x_i = w^{-s} \left(\frac{s-1}{s}\right)^{2s} n^{p_1(\gamma(s-1)-1)} \tag{4}$$

Le temps de travail alloué à chaque tâche est donc le même. La maximisation en fonction de la division interne du travail donne, en utilisant l'équation précédente,

$$\left(\frac{n+1}{n^{\gamma(s-1)}}\right)^{p_1} = \frac{1}{h}\gamma \left(\frac{s-1}{s}\right)^{2s} w^{-s} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \tag{5}$$

Les conditions de second ordre impose $\gamma(s-1)\ln n < \ln n+1$. Le terme de gauche de l'équation (5) est donc une fonction croissante de p_1. La division du travail est une fonction décroissante du coût du travail w et du coût de division du travail h.

Les deux équations précédentes permettent de calculer le ratio τ du nombre de travailleurs consacrés à la production sur le nombre de travailleurs consacrés à l'organisation dans chaque firme :

$$\tau = \frac{n^{p_1} x}{h(n+1)^{p_1}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

Ainsi plus la division du travail augmente la productivité, c'est à dire plus γ est grand, plus la quantité de travail alloué à la la coordination et la gestion de l'information est importante. Les équations (4), (3) et (2) permettent de calculer le prix

$$P = \frac{s}{s-1} n^{-p_1\gamma} w$$

Le prix d'un bien intermédiaire est proportionnelle au coût unitaire du travail. Il dépend négativement de l'effet de la division du travail sur la productivité, γ. Les gains de productivité se répercutent ainsi en une baisse des prix. Le terme $\frac{s}{s-1}$ représente le pouvoir de monopole du producteur intermédiaire.

Marshall (1920) pose une distinction célèbre entre les rendements internes à la firme et les rendements externes à la firme mais internes au secteur industriel. Nous avons jusqu'à présent modélisé les premiers. La section suivante modélise les seconds. Ceux-ci vont être engendrés par la modification de la division du travail à l'échelle macroéconomique, liée à l'apparition de nouvelles firmes.

3 Division macroéconomique du travail.

La division interne du travail, modélisée dans la section précédente, engendre des opportunités de profit qui permettent à de nouvelles firmes de vendre des biens capitaux. Suivant Adam Smith les opportunités de profits correspondent à la possibilité de vendre des biens réalisant les différentes tâches de l'économie effectuées auparavant par des travailleurs. Les nouvelles firmes divisent elles-mêmes le travail en leur sein, engendrant ainsi d'autres opportunités de profits. Ainsi des firmes apparaissent successivement pour produire de nouveaux biens capitaux, allongeant les détours de production. Les nouvelles firmes produisent des machines qui incorporent les tâches réalisés auparavant par les salariés. Le travail n'est pas seulement divisé au sein de la firme, mais aussi entre firmes par l'intermédiaire de la structure des prix relatifs.

Cette section montre qu'en équilibre partiel, salaire w et revenu R fixés, la structure de l'économie se développe de la manière suivante : la division du travail des firmes décroît avec la profondeur de la division externe du travail et celle-ci s'arrête à une valeur $t_{\max}$dont nous étudions les propriétés.

Une firme est dite à l'ordre t dans la division externe du travail lorsque le nombre de biens capitaux entre la firme et la firme produisant le bien final est t. La firme produisant le bien final est donc à l'odre 0. Si la division externe est à l'ordre t, les firmes de rang t sont les dernières, et les firmes qui se créent pour vendre des biens capitaux aux firmes de rang t sont de rang $t+1$. Le processus d'apparition de nouvelles firmes est le suivant : si la division interne du travail des firmes de rang t est p_t, elles produisent avec des travailleurs exécutant un continuum n^{p_t} de tâches. [1] Pour chaque

[1] Nous pouvons indicer les firmes par leur seule place dans la division externe du travail, car nous montrons qu'elles ont le même programme et choisissent donc la même division

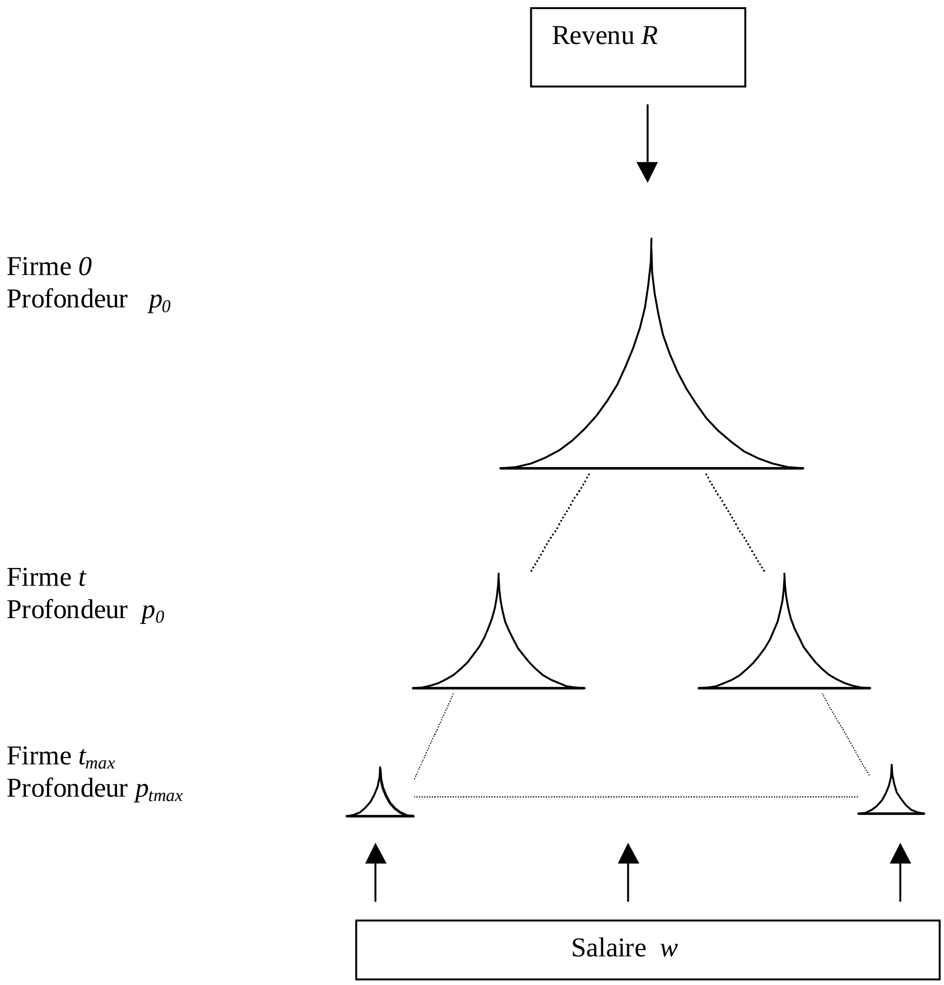

Fig. 1: Taille des firmes à revenu fixé.

firme de rang t un continuum de n^{p_t} nouvelles firmes apparaissent. Chacune d'elles produit un bien capital qui remplace un travailleur réalisant une tâche précise. Les firmes de rang t produisent maintenant avec des biens capitaux et économisent leurs coûts d'information. Les firmes produisant les biens capitaux sont toutes différentes et vendent un bien réalisant une tâche précise. Les biens intermédiaires sont entièrement consommés dans la période.

Ce modèle s'éloigne ici de modèles de croissance par R&D. En effet, ceux-ci feraient dépendre le nombre de nouvelles entreprises seulement de l'effort de recherche. Le modèle ne formalise pas ce mécanisme pour étudier l'idée d'opportunités d'innovation. Il se concentre sur le mécanisme d'augmenta-

interne du travail et les mêmes quantités.

tion des détours de production et l'hypothèse que toutes les opportunités de profits sont satisfaites est utilisée en première approximation pour simplifier l'exposition. On suppose donc que le profit des firmes est la rémunération de l'effort de recherche et développement.

Lorsque des firmes de rang $t+1$ apparaissent, les firmes de rang t qui produisaient avec du travail achètent maintenant des biens capitaux qui sont moins chers que le coût du travail. Le prix des inputs des firmes de rang t diminue, elles modifient alors leur prix, changeant ainsi le prix des inputs des firmes de rang $t-1$. De proche en proche l'ensemble de la structure des prix relatifs se modifie après l'arrivée de nouvelles firmes.

Ainsi, pour reprérer une firme dans la division du travail de l'économie, nous avons besoin de deux indices. Le premier indice l situe la profondeur de l'entreprise dans la division externe du travail. C'est un indice statique qui parcourt la structure productive. Le second indice t décrit la profondeur de la division externe du travail. Nécessairement $l \leq t$. Le premier indice l détermine la demande vue par une firme, le second indice t détermine le prix de ses inputs.

$P_{l,t}$, $\pi_{l,t}$, $q_{l,t}$ sont respectivement le prix, le profit et la production des firmes de rang l lorsque la profondeur totale de la division du travail est t. Ainsi $P_{0,t}$, qui est le prix que voit le consommateur final, est utilisé comme numéraire et est donc égal à 1. $p_{l,t}$ est la division interne du travail des firmes de rang l lorsque la division externe du travail est t. Enfin, la fonction de demande inverse qu'anticipent les firmes de rang l est notée $P_l(q)$.

Ainsi les firmes de rang l lorsque la division externe du travail est t maximise leur profit, qui s'écrit

$$\pi_{l,t} = P_l(q_t)q_t - \int_0^{n^p} P_i q_i^d di \text{ où } k = 1...n^p$$

La fonction de production est maintenant

$$q_t = n^{p\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left(\int_0^{n^p} q_i^{\frac{s-1}{s}} di \right)^{\frac{s}{s-1}} \tag{6}$$

La maximisation du profit se fait seulement sur les quantités q_i car la firme ne peut plus diviser le travail avec ses machines. La fonction de production n'utilise donc plus de travail. Cette hypothèse n'est pas essentielle et est utilisée pour simplifier les calculs. L'hypothèse importante est que, une fois que les firmes produisent avec des biens intermédiares, la division du travail est déterminée par l'utilisation de ces biens. Cette hypothèse permet de se concentrer sur la dimension verticale de la dynamique de la division du travail et d'étudier son influence sur la croissance.

La résolution de ce programme donne la demande des firmes de rang l pour la production des firmes de rang $l+1$ lorsque leur prix est P, donc aussi la fonction de demande inverse $P_{l+1}(q)$. La détermination des fonctions de demande inverse se fait par récurrence.

Lemme 1 *: Les firmes de rang $t \geq 1$ voient une fonction de demande inverse de la forme :*

$$P_t(q) = n^{\left(\gamma\frac{s-1}{s}-\frac{1}{s}\right)\chi_{t-1}} \left(\frac{s-1}{s}\right)^t q^{-\frac{1}{s}} \tag{7}$$

avec $\chi_t = \sum_{k=1}^{t} p_k$. Elles choisissent une division du travail p_t

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p_t} = \frac{1}{h}\gamma\frac{\ln n}{\ln(n+1)}w^{-s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} \tag{8}$$

Démonstration : La section précédente montre que le lemme est vrai à l'ordre 1. Supposons que le lemme soit vrai à l'ordre t. Le programme des firmes terminales, de rang t est alors

$$\max_{x_i, p_t} P_t(q)q - \int_0^{n^{p_t}} wx_i \ di - hw(n+1)^{p_t} \text{ où } 0 \leq i \leq n^p$$

Avec la fonction de demande (7) et la fonction de production (3) . Les conditions du premier ordre donnent après quelques calculs

$$\begin{aligned} x_i &= w^{-s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_{t-1}} n^{(\gamma(s-1)-1)p_t} && (9) \\ &= w^{-s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} && (10) \end{aligned}$$

et

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p_t} = \frac{1}{h}\gamma\frac{\ln n}{\ln(n+1)}w^{-s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} \tag{11}$$

L'arrivée des firmes de rang $t+1$ entraînent une substitution des travailleurs par les machines si leur prix le permet. Si P_i est le prix du bien capital qui prend la place du travail réalisé sur la tâche i dans la firme de rang t, le programme de la firme devient

$$\max_{q_i} P_t(q_t)q_t - \int_0^{n^p} P_i q_i^d di \text{ où } k = 1...n^p$$

La fonction de production est maintenant $q_t = n^{p\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left(\int_0^{n^p} q_i^{\frac{s-1}{s}} di\right)^{\frac{s}{s-1}}$. Par l'hypothèse de récurrence, la fonction de demande inverse est (7). La maximisation du profit des firmes de rang t donne les fonctions de demande

$$q_i^d = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} P_i^{-s} \tag{12}$$

Les firmes de rang $t+1$ qui produisent à un prix P_i ,$0 \leq i \leq n^{p_t}$ voient donc une fonction de demande inverse

$$P_{t+1}(q) = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{t+2} n^{\left(\gamma\frac{s-1}{s} - \frac{1}{s}\right)\chi_t} q^{-\frac{1}{s}}$$

Les calculs qui ont permeis de trouver (11) montre que (8) est vrai à l'ordre $t+1$. Ce qui montre que le lemme est vrai au rang $t+1$. Par récurrence le résultat est donc vrai à tous les ordres. ■

La fonction de demande vue par les nouvelles firmes est la fonction de demande vue par les firmes de rang directement inférieur, multiplié par une constante $\frac{s-1}{s}$ inférieure à 1, ce qui est la cause de la décroissance de la division interne du travail avec le rang de la firme. Comme dans la section précédente, elle vient de la concurrence monopolistique des firmes.

Le lemme précédent permet de déterminer l'ensemble de la structure des prix relatifs et de son évolution avec la division du travail.

Lemme 2 *: Les prix décidés par les firmes obéissent à l' équation de récurrence suivante, où $t+1$ est la profondeur de la division externe du travail.*

$$P_{l,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma p_l} P_{l+1,t+1} \tag{13}$$

Si la firme est la dernière, le prix qu'elle choisit est : $P_{t+1,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\frac{1}{s-1}p_{t+1}} w$. L'allongement d'une unité de la profondeur du travail modifie le prix que fixe une entreprise de rang l de la manière suivante

$$P_{l,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma p_{t+1}} P_{l,t}$$

Démonstration : L'équation (9) donne la demande de travail pour chaque tâche. L'expression de la fonction de production (3) et de la fonction de demande inverse (7) permettent d'exprimer le prix fixé par les firmes de rang $t+1$, lorsqu'elles sont les dernières dans la division externe du travail.

$$P_{t+1,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma p_t} w \tag{14}$$

Toutes les firmes de rang $t+1$ décident donc du même prix. En calculant la production avec les équations (6) et (12), et en utilisant (7), l'on peut déterminer le prix fixé par les firmes de rang t en fonction du prix fixé par les firmes de rang $t+1$.

$$P_{t,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma p_t} P_{t+1,t+1} \tag{15}$$

L'arrivée de nouvelles firmes ne changent pas le programme des firmes préexistantes, sauf pour les dernières. Ainsi, le prix fixé dépend de la même manière du prix des inputs. Ainsi l'on peut directement écrire, en utilisant (15)

$$\forall l < t, \quad P_{l,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma p_{t+1}} P_{l+1,t+1} \tag{16}$$

Avec (13) et (14), on montre $P_{l,t} = \left(\frac{s}{s-1}\right)^{t+1-l} n^{-\gamma \sum\limits_{k=l}^{t} p_k} w$. Avec (16) et (14) on montre $P_{l,t+1} = \left(\frac{s}{s-1}\right)^{t+2-l} n^{-\gamma \sum\limits_{k=l}^{t+1} p_k} w$. Ces deux équations permettent de démontrer la dernière équation du lemme. ■

L'équation (14) montre que la division du travail dans une firme ne peut être inférieure à une constante $p_{\min}$ définie par $\left(\frac{s}{s-1}\right) n^{-\gamma p_{\min}} = 1$, Soit

$$p_{\min} = \frac{\ln\left(\frac{s}{s-1}\right)}{\gamma \ln n}$$

En effet si $p_t < p_{\min}$ alors le prix chargé par la firme est supérieur au salaire horaire w et aucune firme n'achète alors le bien produit.

L'équation (13) montre que la condition $p_t < p_{\min}$ implique que le prix décidé par une firme est inférieur au prix de ses inputs. Le prix est d'autant plus faible que la division interne du travail est grande. En effet, plus celle-ci est importante, plus les gains de productivité sont importants. La firme a alors intérêt à augmenter sa production, donc à baisser ses prix, pour vendre plus. Ainsi, la différence de prix entre un input de rang t et un input de rang $t+1$ est une fonction croissante de la division du travail dans les firmes de rang t. Comme conséquence, le prix des biens capitaux est une fonction croissante de leur rang dans la division externe du travail. Plus leur rang est grand, plus leur demande est faible, les firmes exploitent donc peu leurs rendements croissants.

La dernière équation montre l'évolution du système de prix lorsque la division externe du travail augmente. Les nouvelles firmes de rang $t+1$ induisent une baisse du coûts des inputs pour les firmes de rang t d'un rapport

$P_{t+1,t+1}/w < 1$. Cette baisse des prix se propage dans toute l'économie. En effet, toutes les firmes réduisent leur prix du même rapport $P_{l,t+1}/P_{l,t}$ qui est égal à la baisse initiale du coût des inputs $P_{t+1,t+1}/w$. Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cette section. En effet, l'équation (8) est la fonction de récurrence que vérifie la division interne du travail

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p_t} = \frac{1}{h}\gamma\frac{\ln n}{\ln(n+1)}w^{-s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} \tag{17}$$

En divisant cette égalité en $t+1$ par celle en t, on trouve l'équation de récurrence

$$p_{t+1}\left(\ln(n+1) - \gamma(s-1)\ln n\right) = -s\ln\frac{s}{s-1} + \ln\frac{n+1}{n}p_t$$

Cette équation montre qu'il existe un seuil

$$p^s = s\ln\frac{s}{s-1}/\ln n^{\gamma(s-1)-1} \tag{18}$$

qui est l'équilibre instable de cette récurrence, tel que si $p_1 < p^s$ alors la division interne du travail décroît et tend vers $-\infty$, et si $p_1 > p^s$ alors la division du travail augmente tend vers $+\infty$. Ce seuil tend vers l'infini lorsque $\gamma(s-1)$ tend vers 1

On privilégie dans cette section le cas $p_1 < p^s$. En effet, le salaire étant constant dans cette section, il est irréaliste de considérer un cas où le nombre de firmes augmentent continument et tend vers l'infini, sans considirer l'équilibre du marché du travail. Cet équilibre est étudié dans la section suivante. On se restreint donc ici au cas $p_1 < p^s$.

On vérifie facilement que la solution de cette récurrence est

$$p_t = a^{t-1}p_1 - b\sum_{k=0}^{t-2} a^k \tag{19}$$

avec $a = \ln\frac{n+1}{n}/\ln\frac{(n+1)}{n^{\gamma(s-1)}} > 0$ et $b = s\ln\frac{s}{s-1}/\ln\frac{(n+1)}{n^{\gamma(s-1)}} > 0$. La division du travail des firmes de rang 1 est donnée par l'équation (5). Le graphe de la figure précédente correspond donc au cas où $p_1 < p^s$. La division du travail décroît et s'arrête en fait au premier rang $t_{\max}$ tel que $p_{t_{\max}} < p_{\min}$. La solution (19) montre que la division interne de chaque firme, décroît lorsque p_1 décroît. Ainsi, comme p_1,le rang $t_{\max}$ est une fonction décroissante de h et w. Ceci suffit à démontrer la proposition suivante.

Proposition 1 *Si $p_1 < p^s$, avec p^s défini par (18), la division interne du travail choisie par les firmes de rang l, p_l décroît avec l. La division externe du travail s'arrête à une profondeur $t_{\max}$ qui est une fonction décroissante du coût de division du travail h et du coût du travail w.*

Comme la demande rencontrée par chaque firme est décroissante avec son rang dans la division externe du travail, et comme la division interne du travail est une mesure de l'exploitation des rendements croissants, on trouve naturellement que la division interne du travail décroît avec le rang des firmes. Comme la division du travail ne peut être inférieur à $p_{\min}$ la division externe s'arrête car il n'y a plus d'opportunité de profits. De plus, les sens de variation sont intuitifs. Une augmentation du coûts du travail et du coût de division du travail diminuent les rendements croissants, donc le choix de division interne de chaque firme et finalement la profondeur de la division externe du travail $t_{\max}$. Comme le bien final a été choisi comme numéraire, une diminution de w peut être une diminution du salaire réel ou une augmentation du prix du bien final.

Ainsi, si la demande adressée à l'économie augmente le prix de vente du bien final augmente ce qui équivaut dans le modèle à une baisse de w. La division verticale du travail $t_{\max}$ augmente alors. On retrouve ainsi le résultat de Stigler (1951) qui relie le degré de désintégration verticale et la demande adressé à un secteur. En effet, pour celui-ci, la croissance d'une branche industrielle se mesure à la vitesse de désintégration verticale. Inversement, une branche industrielle en déclin se concentre verticalement. Ici, une branche industrielle qui voit une demande importante a une division externe du travail plus développée. La création de nouveaux biens capitaux a lieu avec la création de nouvelles tâches. Le modèle est donc conforme à l'intuition de Smith qui relie division du travail, ici interne et externe, et taille du marché.

Nous avons jusqu'à présent modélisé l' articulation entre division interne et division externe du travail en considérant le salaire constant. Cependant, le processus de division du travail modifie la demande de travail de l'économie. On s'attend donc à voir le salaire évoluer. L'étude de l'influence de la taille de la population sur l'évolution des salaires méne au modèle de croissance endogène.

4 Division du travail et Croissance endogène

En équilibre partiel, la section précédente montre que la taille des firmes décroît avec la division externe du travail. Cette section rend le salaire endogène. La taille des firmes tend alors vers une constante non nulle lorsque le taux de croissance de la population est positif. Cette augmentation continue

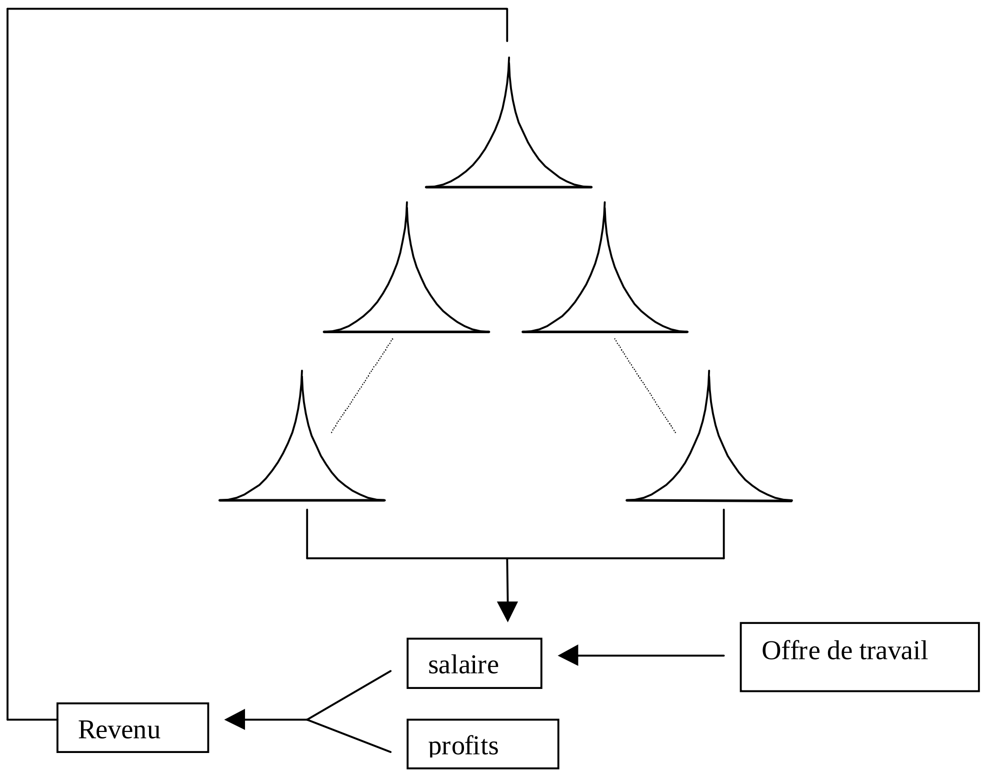

FIG. 2: Mécanisme de croissance auto-entretenue.

des détours de production permet un taux de croissance par tête positif. Le graphe suivant montre maintenant l'évolution de l'économie.

Nous supposons que tout le revenu, la somme des profits et des salaires, est dépensé à chaque période. A chaque période t de nouvelles firmes apparaissent. Cela modifie d'une part le coût des inputs que voit les autres firmes, donc les prix fixés par les firmes, notamment le prix du bien à la consommation. D'autre part, l'évolution de la division du travail modifie la demande de travail donc le salaire w_t est le salaire horaire de la période t.

Le profit d'une firme terminale s'écrit maintenant

$$\pi_{t,t}(p, x_i) = P_t(q)q - \int_0^{n^p} x_i w_t \; di - h w_t (n+1)^p \text{ avec } 0 \leq i \leq n^p \tag{20}$$

La résolution demande la détermination de la fonction de demande qui se fait comme dans la section précédente.

Lemme 3 *: Les firmes de rang t voient une fonction de demande inverse de la forme :* $P_t(q) = n^{\left(\gamma \frac{s-1}{s} - \frac{1}{s}\right)\chi_{t-1}} \left(\frac{s-1}{s}\right)^t q^{-\frac{1}{s}}$*. Elles choisissent une division* *du travail* p_t *définit par :*

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{p_t} = \frac{1}{h}\gamma\frac{\ln n}{\ln(n+1)}w_t^{-s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} \tag{21}$$

Démonstration : La démonstration de ce lemme est exactement celle de la section précédente. Le salaire horaire est maintenant indexé par la période. Les conditions du premier ordre pour les firmes terminales donnent la demande de travail pour chaque tâche, x_t :

$$x_t = w_t^{-s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t} \tag{22}$$

Le choix de la division interne du travail par la firme est donnée par l'équation (20). Le coût de division du travail est

$$hw_t\,(n+1)^{p_t} = \gamma w_t^{1-s}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_{t-1}} n^{\gamma(s-1)p_t} \tag{23}$$

Ce qui permet de déduire (21).■

Les deux équation précédentes permettent de calculer, comme dans la précédente section, le ratio au sein de chaque firme du nombre de travailleurs consacrés à la production sur le nombre de travailleurs consacrés à l'organisation

$$\tau = \frac{n^{p_t}x}{h(n+1)^{p_t}} = \frac{1}{\gamma}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \tag{24}$$

La détermination de la consommation à chaque période se fait par l'étude de l'équilibre de tous les marchés des biens intermédiaires.

Lemme 4 *: Si la division externe du travail est de rang* t*, la production totale à chaque période est* $Y_t = mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\chi_t}x_t^{\frac{s-1}{s}}$ *où* $\chi_t = \sum_{k=1}^{t} p_k$*, et* x_t *est le temps de travail alloué à une tâche, déterminé par l'équation (22).*

Démonstration : Chaque firme de rang $l \geq 1$, non terminales a une production $q_l = n^{p_l\left(\gamma-\frac{1}{s-1}\right)}\left(\int_0^{n^{p_l}} q_i^{\frac{s-1}{s}}\,di\right)^{\frac{s}{s-1}}$, où q_i est la quantité d'input de type i que les firmes de rang t achètent à une firme de rang $t+1$. Par symétrie la quantité q_i achetée est la même pour toutes les firmes et toues les inputs et est égale à la production d'une firme de rang $t+1$. D'où $q_l = n^{p_l(\gamma+1)}q_{l+1}$. Cette équation définit une équation de récurrence qui donne la production d'une firme qui produit un bien final $q_1 = n^{(\gamma+1)\chi_{t-1}}q_t$, avec $\chi_{t-1} = \sum_{k=1}^{t-1} p_k$. De même, en utilisant le fonction de production (3), et par symétrie, les dernières firmes, qui sont de rang t ont une production $q_t = n^{(\gamma+1)p_t}x_t$. En utilisant cette équation, on trouve $q_1 = n^{(\gamma+1)\chi_t}x_t$ Enfin la fonction de production des firmes produisant le biens finals (1), donne enfin la production totale $Y = mq_1^{\frac{s-1}{s}} = mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\chi_t}x_t^{\frac{s-1}{s}}$. ■

L'équilibre du marché du travail permet maintenant de déterminer la division du travail et le taux de croissance d'équilibre.

4.1 Marché du travail.

La taille de la population détermine l'offre de travail et le salaire horaire. L'entreprise choisit la division interne du travail en fonction du coût du travail. Ces deux relation permettent de relier la division du travail choisit par les nouvelles firmes en fonction du taux de croissance de la population.

Proposition 2 *La division du travail au sein de chaque nouvelle firme tend vers une constante définie par*

$$p_\infty = \frac{u}{\ln n} \tag{25}$$

où u est le taux de croissance de la population.

Démonstration : La demande totale de travail est la demande de travail d'une firme terminale, multipliée par leur nombre χ_{t-1} : $D_t^{travail} = n^{\chi_{t-1}}\left(n^{p_t}x_t + h(n+1)^{p_t}\right)$, où x_t et $h(n+1)^{p_t}$ sont donnés par (22) et (23). L'équilibre $L_t = D_t^{travail}$ s'écrit

$$L_t = w_t^{-s}\left(1+\gamma\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)n^{\chi_{t-1}}n^{(\gamma(s-1)-1)\chi_t}n^{p_t}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} \tag{26}$$

.On peut déduire le salaire horaire

$$w_t^s = L_t^{-1}\left(1+\gamma\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)n^{\gamma(s-1)\chi_t}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{s(t+1)} \tag{27}$$

En utilisant (21), on trouve finallement l'équation de récurrence

$$(n+1)^{p_t} = \frac{1}{h}\frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}}L_t n^{-\chi_{t-1}}$$

En divisant cette équation par la même équation exprimée pour la période $t-1$, on peut calculer la différence $p_t - p_{t-1} = \frac{1}{\ln(n+1)}u - \frac{\ln n}{\ln(n+1)}p_{t-1}$, où u est le taux de croissance de la population. Nous supposons qu'il est suffisamment faible pour permettre la simplification d'écriture $\ln(1+u) = u$. Soit la constante $p_\infty = \frac{u}{\ln n}$. L'équation précédente montre que $p_t - p_\infty = \frac{\ln n}{\ln(n+1)} (p_{t-1} - p_{-\infty})$. Cette égalité montre que la division interne du travail tend toujours, et de manière monotone vers la division du travail de long terme p_∞. Ainsi, si la taille initiale de la population détermine une division du travail dans les firmes de rang 0 égale à $p_0 > p_\infty$, alors la division interne tend en décroissant vers p_∞. Dans le cas contraire, elle tend en croissant vers sa limite. ■

Si la population ne croît pas, le coût du travail augmente trop vite par rapport au gains de productivité et la division du travail s'arrête. La division du travail est donc limitée par le marché du travail. Dans le cas contraire, la division du travail engendre des gains de productivité qui permettent une augmentation du revenu par tête. Le taux de croissance de l'économie est alors déterminée par la croissance de la population.

Proposition 3 *Le taux de croissance du revenu réel par habitant g tend vers*

$$g_\infty = \frac{1}{s} \left(\gamma(s-1) - 1\right) u$$

où u est le taux de croissance de la population.

Démonstration : En utilisant la production totale donnée par (4) on trouve $\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s} p_{t+1}} \left(\frac{x_{t+1}}{x_t}\right)^{\frac{s-1}{s}}$. En utilisant (22) et (27), on obtient

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \left(\frac{L_{t+1}}{L_t} n^{\gamma p_{t+1}}\right)^{\frac{s-1}{s}}$$

La puissance $\frac{s-1}{s}$ vient des rendements décroissants des firmes produisants le bien final. Le terme $n^{\gamma p_{t+1}}$ représente les gains de productivité induit par une augmentation de la division interne du travail. Enfin le terme $\frac{L_{t+1}}{L_t}$ traduit simplement l'effet de l'augmentation des ressources totales sur la production totale. En faisant l'hypothèse simplificatrice que $\frac{Y_{t+1}}{Y_t}$ est proche de 1, on trouve un taux de croissance par tête $g_{t+1} = \ln \frac{Y_{t+1}}{Y_t} - u = \gamma \frac{s-1}{s} \ln n \, p_{t+1} - \frac{1}{s} u$. Cette dernière équation montre que la dynamique du taux de croissance est la même que celle de la division interne du travail, ce qui nous permet de déduire la dynamique transitoire du taux de croissance de celle de la division interne du travail. En utilisant la valeur de la division interne de long terme on trouve le taux de croissance par tête d'équilibre

$$g_\infty = \frac{s-1}{s} \left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right) u$$

■

Le taux de croissance par tête de l'économie est une fonction croissance de γ. Ce coefficient mesure en effet les gains de productivité induits par une augmentation de la division du travail. Le taux de croisance est une fonction croissante de s qui mesure le pouvoir de monopole des firmes.Comme chez Aghion et Howitt(1992), plus les firmes ont un pouvoir de monopole important, plus le taux de croissance est élevé. En effet, lorsque s tend vers l'infini, c'est à dire lorsque les fonctions de demande inverse sont de moins en moins élastiques, le taux de croissance tend vers γu. Le taux de croissance par tête est positif ou négatif suivant la position relative de γ et de $1/(s-1)$. En effet, il faut des gains de productivité suffisants pour permettre une croissance de la consommation par tête.

Cette expression montre que la division du travail aboutit dans ce modèle à une croissance semi-endogène. Cette dénomination vient de Jones(1995) qui la reprend lui-même de Arrow(1962). Elle recouvre la classe de modèle ayant un taux de croissance par tête positif si la population croît. Ce n'est pas directement le niveau des ressources mais leur taux de croissance qui détermine le taux de croissance de long terme.

Le taux de croissance de la population ne détermine le taux de croissance qu'à long terme. Lors de la dynamique transitoire, la taille de la population influence également le taux de croissance. En effet, une économie avec une population importante voit un coût du travail plus faible, donc une division du travail et une croissance plus importante. Ces effets sont résumés par le graphique suivant. Si la quantité de travail disponible est faible, le taux de croissance croît vers sa valeur de long terme. Si la taille de la population est plus importante le taux de croissance décroît vers sa valeur de long terme. Dans tous les cas, plus la quantité de travail disponible est importante plus l'économie croît vite. Ainsi, même si la taille de la population est constante, donc le taux de croissance par tête nul à long terme, l'économie voit un taux de croissance positif qui décroît vers 0.

Enfin, cette croissance auto-entretenue n'est possible que si le revenu initial des consommateurs permet à la division du travail de s'amorcer et de distribuer des revenus supplémentaires. Or la section précédente montre que des revenus trop faibles, ou un coût du travail ou de division du travail trop important ne permettent pas à celle-ci de s'amorcer. Dans ce cas l'économie est bloquée dans une trappe à pauvreté.

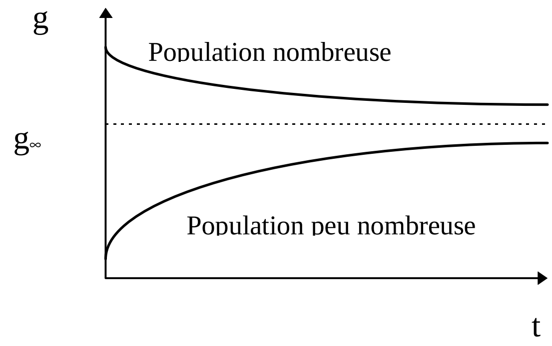

FIG. 3: Taux de croissance par tête en fonction de la taille de la population avec même taux de croisance de la population.

5 Croissance optimale

La résolution du programme du planificateur central permet de déterminer dans quel cas les allocations décentralisées sont optimales et, si elles ne le sont pas, quelles sont les mesures de politique économique susceptibles d'augmenter le bien-être de l'économie. Contrairement aux agents de l'économie décentralisée, le planificateur central connaît la nature du progrès technique, et donc le lien entre la division interne du travail des firmes et le nombre de nouveaux biens capitaux introduits dans l'économie.Le programme optimal, qui nécessite quelques calculs est résolu en annexe. Les principaux résultats sont résumés dans la proposition suivante.

Proposition 4 *Le long d'un sentier de croissance équilibrée où la fraction de la population allouée à la production est constante, la division optimale de long terme est*

$$p^* = \frac{u}{\ln n}$$

Le taux de croissance de la production par tête est alors

$$g^* = \frac{1}{s}(\gamma(s-1)-1)u$$

La fraction de la population consacrée à la production sur celle consacrée à l'organisation est

$$\tau^* = \frac{1}{\gamma \ln n}\left(\ln(n+1) - \beta \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) e^{\frac{s-1}{s}(\gamma+1)u}\right)$$

Si $\beta > 0$ alors $\tau^* < \tau$.

La division d'équilibre comme le taux de croissance de long terme sont les mêmes pour le programme optimal et pour l'économie décentralisée. Par contre la dynamique transitoire n'est pas optimale dans le cas décentralisé. En effet le ratio τ des travailleurs alloués à la production sur les travailleurs alloués à l'organistion est inférieur au ratio optimal. τ^*. Le bien être de la société peut donc être augmenté en incitant les firmes à consacrer plus de ressources à l'organisation. Ceci tendra à augmenter le nombre de tâche donc les gains de productivité à la période suivante du fait de l'introduction de nouveaux biens capitaux. Ainsi, des mesures de politique économique peuvent augmenter le bien-être de l'économie pendant la dynamique transitoire. A long terme par contre, le taux de croissance par tête dans le cas décentralisé et dans le cas optimal coincide. Cette propriété, optimalité de l'équilibre décentralisée, sous optimalité lors de la dynamique transitoire, se retrouve dans le modèle de croissance sans effets d'échelle de Segerstrom (1998). Par ailleurs, l'étude des mesures de politique économique lors de la dynamique transitoire renvoie au premier modèle de croissance de Solow [1956], dans lequel les mesures de politique économique n'ont qu'un effet transitoire.

6 Résumé et Conclusion

Ce modèle explique la croissance du revenu réel par habitant par la dynamique de la division du travail. Celle-ci est à la fois interne et externe. La division interne du travail dans les firmes engendrent des gains de productivité et est limitée par des coûts d'organisation. Par ailleurs, celles-ci engendrent une demande potentielle pour des biens capitaux qui sont produits par des nouvelles firmes qui divisent elles-mêmes le travail. Ainsi, tant qu'il y a des opportunités de profits rendus possible par la division interne, de nouvelles firmes produisent de nouveaux biens capitaux, allongeant ainsi les détours de production. Ainsi, contrairement aux modèles qui font dépendre le nombre d'innovation par période de la seule intensité de recherche, ce modèle formalise le processus qui engendre les oppotunités d'innovation susceptibles d'augmenter la productivité. Le modèle a d'abord été étudié en équilibre partiel. L'allongement des détours de production croît lorsque la demande adressée aux firmes augmente. La fonction de production agrégée présente alors des rendements sdifférents de ceux au niveau des firmes. Avec l'hypothèse de plein emploi des facteurs, cette causalité circulaire entre division interne et division externe du travail définit un taux de croissance par tête qui est une fonction du taux de croissance de la population. L'étude du programme optimal a montré que l'équilibre décentralisé alloue trop peu de ressources à la division du travail.

Annexes

démonstration de la proposition 4

Le planificateur maximise l'utilité intertemporelle des ménages qui ont une préférence pour le présent r. Il choisit à chaque période le temps x alloué à chaque tâche de l'économie, la demande de facteurs, ainsi que la division interne du travail p dans chaque firme. Pour rendre l'exposition plus facile, la résolution est fractionnée en 2 lemmes.

Lemme 5 : *La production totale à chaque période est* $Y_t = n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\chi_t} x_t^{\frac{s-1}{s}}$.

L'écriture du programme du planificateur se simplifie car il est symétrique, c'est à dire que le temps optimal alloué à chaque tâche est le même pout toutes les tâches et que la division interne du travail est la même dans toutes les firmes de même rang. Les firmes de rang l produisent une quantité $q^o_{i,l}$ avec une demande d'input $q^d_{i,j,l}$ de type j demandé par la firme i de rang l. Chaque bien étant produit par une seule firme, la demande $q^d_{i,j,l}$ des firmes de rang l est égale à la production d'une firme k de rang $l+1$, $q^o_{k,l+1}$.

Toutes les firmes de même rang l ont une même division interne du travail p_l. Le nombre de tâche par firmes est donc n^{p_l}, qui donne lieu à l'apparition d'autant de nouvelles firmes, pour chaque firme de rang l. Ainsi les firmes produisant les biens finals sont un continuum de longueur m. Les firmes de rang 1 sont un continuum de longueur mn^{p_0} et, avec la notation de la section précédente $\chi_t = \sum_{k=0}^{t} p_k$, les firmes de rang l sont un continuum de longueur $mn^{\chi_{l-1}}$. χ_t obéit à la loi de récurrence $\chi_t = \chi_{t-1} + p_t$.

Les firmes non terminales ont une fonction de production

$$q^o_{i,l} = n^{p_l\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left(\int_0^{n^{p_l}} \left(q^d_{i,j,l}\right)^{\frac{s-1}{s}} dj \right)^{\frac{s}{s-1}} = n^{(\gamma+1)p_l} q^d_{i,j,l}$$

avec $q^d_{i,j,l} = q^o_{k,l}$ avec $0 \leq i \leq n^{\chi_{t-1}}$, $0 \leq j \leq n^{p_l}$ et $0 \leq k \leq n^{\chi_{l-1}} * n^{p_l} = n^{\chi_l}$. Cette dernière égalité est obtenue avec $\chi_l = \chi_{l-1} + p_l$.

La fonction de production des firmes terminales est

$$q^o_{i,t} = n^{p_t\left(\gamma - \frac{1}{s-1}\right)} \left(\int_0^{n^{p_t}} \left(x^d_{i,j,t}\right)^{\frac{s-1}{s}} dj \right)^{\frac{s}{s-1}} = n^{(\gamma+1)p_t} x^d_{i,j,t}$$

Comme toutes les firmes de même rang l produisent la même quantité q_l, les équations précédentes donnent $q_l = n^{(\gamma+1)p_l} q_{l+1}$ pour $l < t-1$, et $q_t = n^{(\gamma+1)p_t} x_t$. Finallement la production du secteur produisanrt le bien final est

$$Y_t = mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\sum_{k=0}^{t} p_k} x_t^{\frac{s-1}{s}} = n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\chi_t} x_t^{\frac{s-1}{s}}$$

Cette équation est la même que dans le cas décentralisé. Elle utilise en effet l'équilibre des marchés et les fonctions de production, qui sont identiques dans les deux cas.

Lemme 6 : *Le programme optimal est*

$$\max_{p_t, x_t} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k m n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\chi_k} x_k^{\frac{s-1}{s}}$$

$$n^{\chi_{k-1}} \left(n^{p_k} x_k + h (n+1)^{p_k}\right) = L_k \tag{28}$$

$$\chi_k = \chi_{k-1} + p_k \tag{29}$$

Le planificateur fait face à deux contraintes. La première est l'équilibre du marché du travail. Celui-ci est donné par $mn^{\chi_{t-1}} \left(n^{p_t} x_t + h (n+1)^{p_t}\right) = L_t$: l'offre de travail L_t est égale à la demande de travail de chaque firme pour la production $n^{p_t} x_t$ et pour l'organisation $h (n+1)^{p_t}$, multipliée par le nombre de firmes terminales $mn^{\chi_{t-1}}$. La seconde contrainte est l'externalité reliant la division interne et externe du travail. Cette externalité est résumée par l'équation $\chi_l = \chi_{l-1} + p_l$: le nombre de firmes dépend de la division interne du travail et du nombre de firme de la période précédente.

Les résultats principaux sont donnés par la proposition.

Proposition 5 *Le lon d'un sentier de croissance équilibrée où la fraction de la population allouée à la production est constante, la division optimale de long terme est*

$$p^* = \frac{u}{\ln n}$$

Le taux de croissance de la production par tête est alors

$$g^* = \frac{1}{s}(\gamma(s-1) - 1)u$$

La fraction de la population consacrée à la production sur celle consacrée à l'organisation est

$$\tau^* = \frac{1}{\gamma \ln n} \left(\ln (n+1) - \beta \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) e^{\frac{s-1}{s}(\gamma+1)u} \right)$$

Si $\beta > 0$ alors $\tau^* < \tau$.

Le lagrangien s'écrit

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\beta^k m n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\left(\chi_{k-1}+p_k\right)} x_k^{\frac{s-1}{s}} \right]$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[\theta_k \left(\chi_k - \chi_{k-1} - p_k \right) + \lambda_k \left(n^{\chi_{k-1}} n^{p_k} x_k + n^{\chi_{k-1}} h (n+1)^{p_k} - L_k \right) \right]$$

La dérivée par rapport à x_t donne

$$\frac{s-1}{s}\beta^t mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\left(\chi_{t-1}+p_t\right)}x_t^{-\frac{1}{s}}+\lambda_t n^{\chi_{t-1}}n^{p_t}=0 \tag{30}$$

La dérivée par rapport à χ_t donne

$$\begin{aligned}(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\ln n\beta^{t+1}mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}(\chi_t+p_{t+1})}x_{t+1}^{\frac{s-1}{s}}+\theta_t-\theta_{t+1} && (31)\\ +\lambda_{t+1}\ln nn^{\chi_t}\left(n^{p_{t+1}}x_{t+1}+h\left(n+1\right)^{p_{t+1}}\right)=0 && (32)\end{aligned}$$

La dérivée par rapport à p_t donne

$$\begin{aligned}(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\ln n\beta^t mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\left(\chi_{t-1}+p_t\right)}x_t^{\frac{s-1}{s}}-\theta_t && (33)\\ +\lambda_t n^{\chi_{t-1}}\left(\ln nn^{p_t}x_t+\ln\left(n+1\right)h\left(n+1\right)^{p_t}\right)=0 && (34)\end{aligned}$$

L'équation (31) avec la contrainte (28) en t et (30) donne

$$\begin{aligned}(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\ln n\beta^{t+1}mn^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}(\chi_t+p_{t+1})}x_{t+1}^{\frac{s-1}{s}} &= -\theta_t+\theta_{t+1}-\lambda_{t+1}\ln nL_{t+1}\\ -\left(\gamma+1\right)\ln n\lambda_t n^{\chi_{t-1}}n^{p_t}x_t &= -\theta_{t-1}+\theta_t-\lambda_t\ln nL_t\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda_t\ln n\left(L_t-\left(\gamma+1\right)n^{\chi_t}x_t\right)=\theta_t-\theta_{t-1}$$

(30) et (33) donnent

$$-\left(\gamma+1\right)\ln n\lambda_t n^{\chi_t}x_t+\lambda_t\ln\left(n+1\right)n^{\chi_{t-1}}\left(n^{p_t}x_t+h\left(n+1\right)^{p_t}\right)+\ln\frac{n}{n+1}\lambda_t n^{\chi_t}x_t=\theta_t \tag{35}$$

Soit

$$\theta_t=\lambda_t\left(\ln\left(n+1\right)L_t-\left(\ln\left(n+1\right)+\gamma\ln n\right)n^{\chi_t}x_t\right)$$

(31) et (33) donne

$$\theta_{t-1}-\theta_t+\lambda_t\ln nL_t=-\theta_t+\lambda_t\ln\left(n+1\right)L_t+\ln\frac{n}{n+1}\lambda_t n^{\chi_t}x_t$$

on trouve le système

$$\begin{aligned}\theta_{t-1} &= \lambda_t\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(L_t-n^{\chi_t}x_t\right) && (36)\\ \theta_t-\theta_{t-1} &= \lambda_t\ln n\left(L_t-\left(\gamma+1\right)n^{\chi_t}x_t\right) && (37)\\ \lambda_t &= -\frac{s-1}{s}\beta^t mn^{\left((\gamma+1)\frac{s-1}{s}-1\right)\chi_t}x_t^{-\frac{1}{s}} && (38)\\ L_t &= n^{\chi_t}x_t+n^{\chi_{t-1}}h\left(n+1\right)^{p_t} && (39)\\ \chi_t &= \chi_{t-1}+p_t && (40)\end{aligned}$$

La dynamique transitoire de ce système est impossible à étudier analytiquement, cependant l'on peut étudier les propriétés des sentiers de croissance équilibrée, c'est à dire les sentiers de croissance à taux constant.

Notons ρ la proportion de la population consacrée à la production, soit $n^{\chi_t} x_t = \rho L_t$. La fraction de la population consacrée à la coordination est $n^{\chi_{t-1}} h\,(n+1)^{p_t} = (1-\rho)L_t$. L'équation (39) donne la production

$$\begin{aligned} Y_t &= m n^{(\gamma+1)\frac{s-1}{s}\chi_t} x_t^{\frac{s-1}{s}} = -\frac{s}{s-1}\beta^{-t}\lambda_t n^{\chi_t} x_t \\ &= -\frac{s}{s-1}\beta^{-t}\lambda_t \rho L_t \end{aligned}$$

Le système se réécrit

$$\begin{aligned} \theta_{t-1} &= \lambda_t \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(1-\rho)L_t \\ \theta_t &= \lambda_t \left[\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho \ln n\right] L_t \end{aligned}$$

Les deux premières équations donnent

$$\lambda_t \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(1-\rho)L_t = \lambda_{t-1}\left[\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho\ln n\right] L_{t-1}$$

Soit

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}} = \frac{\left[\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho\ln n\right]}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(1-\rho)}\frac{L_{t-1}}{L_t}$$

La croissance de la production totale est

$$\begin{aligned} \frac{Y_t}{Y_{t-1}} &= \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_t L_t}{\lambda_{t-1}L_{t-1}} \\ &= \frac{1}{\beta}\frac{\left[\ln(n+1)(1-\rho) - \gamma\rho\ln n\right]}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(1-\rho)} \end{aligned}$$

Comme on a

$$n^{\chi_{t-1}} h\,(n+1)^{p_t} = (1-\rho)L_t$$

En divisant cette équation par son expression en $t-1$, on trouve

$$n^{p_{t-1}}\,(n+1)^{p_t - p_{t-1}} = 1 + u$$

En prenant le logarithme, on trouve l'équation de récurrence

$$p_t - p_{t-1} = \frac{1}{\ln(n+1)}u - \frac{\ln n}{\ln(n+1)}p_{t-1}$$

Cette équation est la même que dans le cas décentralisé, ainsi la division interne du travail tend vers la valeur

$$p^* = \frac{u}{\ln n}$$

La production s'écrit

$$Y_t = mn^{\gamma\frac{s-1}{s}\chi_t}\left(n^{\chi_t}x_t\right)^{\frac{s-1}{s}} = mn^{\gamma\frac{s-1}{s}\chi_t}\left(\rho L_t\right)^{\frac{s-1}{s}}$$

Soit

$$g_t = \ln\frac{Y_t}{Y_{t-1}} - u = \gamma\frac{s-1}{s}p_t\ln n + \frac{s-1}{s}u - u$$

D'où

$$g^* = \gamma\frac{s-1}{s}u + \frac{s-1}{s}u - u = \frac{1}{s}(\gamma(s-1)-1)u$$

La fraction de la population consacrée à la production est déterminée par

$$\begin{aligned}\frac{Y_t}{Y_{t-1}} &= \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_t L_t}{\lambda_{t-1}L_{t-1}} \\ &= \frac{1}{\beta}\frac{[\ln(n+1)(1-\rho)-\gamma\rho\ln n]}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(1-\rho)}\end{aligned}$$

L'égalité $\ln\frac{Y_t}{Y_{t-1}} - u = g^*$ donne

$$\ln\left[\frac{1}{\beta}\frac{[\ln(n+1)(1-\rho)-\gamma\rho\ln n]}{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(1-\rho)}\right] = \frac{1}{s}(\gamma(s-1)-1+s)u$$

Comme ρ est la fraction de la population consacrée à la production sur la population totale, le ratio $\tau^* = \rho/(1-\rho)$ est le ratio de la population consacrée à la production sur la population consacrée à l'organisation. L'expression précédente permet de déterminer τ^*.

$$\tau^* = \frac{1}{\gamma\ln n}\left(\ln(n+1) - \beta\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)e^{\frac{s-1}{s}(\gamma+1)u}\right)$$

Le ratio optimal τ^* et le ratio décentralisé τ coincide si β est nul. Ce cas correspond à une préférence pour le présent totale de telle sorte que le planificateur maximise à chaque période l'utilité de la génération de la période. Dans tous les autres cas, la fraction optimale de la population consacrée à la production est inférieure à celle employée dans le cas décentralisé.

Références

Aghion P. et Howitt (1992) A Model of growth through Creative Destruction. *Econometrica.* 60(2), 323-351.

Amable B. (1995) Endogenous Growth and Cycles through radical and incremental innovation, *Document de travail du CEPREMAP n*°9504.

Amable B., Barré R., Boyer R., *Les systèmes d'Innovation à l'ére de la Globalisation,* Economica, Paris.

Arrow K. (1962) the Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies* XXIX(2), 155-173.

Basu S. and Fernald J.G. (1987), Returns to Scale in U.S. Production : Estimates and Implications, *Journal of Political Economy,* 105(2).

Bolton P. and Dewatripont M.(1994), The firm as a Communication Network, *Quaterly Journal of Economics, 109*(4).

Boyer R. et Schmeder G., Division du travail, changement technique et croissance. Un retour à Adam Smith, *Revue française d'économie,* volume V, hiver 1990.

Coase R. (1937) The Nature of the Firm*, Economica, 1937, p. 386-405.*

Dixit A. et Stiglitz J. (1977) Monopolistic Competition and optimal Product Diversity. *American Economic Review.* 67, 297-308.

Eicher T.S. and Turnovsky S.J (1999), Non-scale Models of Economic Growth, *The Economic Journal,* vol. 109 no. 457

Grossman G.M. and Helpman E. (1991) *Innovation and Growth in the Global Economy,* Cambridge : The MIT Press.

Jones Charles I.(1995), R&D-based Models of Economic Growth, *Journal of Political Economy,* CIII, 759-784.

Jones Charles I.(1999), Growth : with or without scale effects, *American Economic Review (Papers & Proceedings) 89, 139-44.*

Kaldor (1972) The irrelevance of Equilibrium Economics, *Economic Journal* (december 1972) traduit dans *Economie et Instabilité* (1987), Economica, Paris.

Marshall (1920) *Principles of economics*, Macmillan, London.

Romer (1990) Endogenous Technical Change. *Journal of Political Economy.* 98(5) pt. 2, S71-S102.

Rosenbeg N. (1982) *Inside the Black Box : Technology and Economics.*Cambridge University Press.

Schmookler J. (1966) *Inventions and Economic Growth.* Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Segerstrom P.(1998) Endogenous Growth Without Scale Effects, *American Economic Review,* vol 88 no. 5

Smith A.(1976), *La Richesse des Nations*, Gallimard, Paris.

Solow R. (1956) A contribution to the Theory of Economic Growth, *Quaterly Journal of Economics* , 70, 65-94

Stigler (1951) The Division of Labor is Limited by the Extent of the Market, *Journal of Political Economy*, LIX (June), 185-193.

Weitzman M.(1982) Increasing Returns and the Foundations of Unemployment Theory, *The Economic Journal,* 92, 787-804.

Weitzman M. (1988) Increasing Returns and the Foundations of Unemployment Theory : Rejoinder, *The Economic Journal,* 98, 172-174.

Yang X. and Borland J. (1991) A Microeconomic Mechanism for Economic Growth. *Journal of Political Economy.* 34, 199-222.

Young A. (1928) Increasing returns and economic progress, *Economic Journal 38,* 527-542.