N° 7606

L'APPLICATION DES METHODES D'OPTIMISATION AUX MODELES MACROECONOMIQUES DE POLITIQUE ECONOMIQUE

par

Michel DELEAU et Pierre MALGRANGE

Janvier 1976.

E R R A T U M

p. 5 : ligne 7

...de la politique monétaire et de la politique fiscale.

p. 8 : définition de l'ensemble $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \{\delta \mid \ldots\ldots ; \delta(s) \in \underline{\underline{D}} \quad \forall s\}$$

p. 17 : formule :

$$E[d(t) \mid \eta(t)] = d^{\circ}\underline{\underline{(t)}} + \ldots\ldots$$

p. 71 : manque référence :

VIOT M. (1964)
Théorème de séparation du contrôle stochastique en temps discret.
Ronéo.

Cette étude a été réalisée dans le cadre de la convention de recherche n° 37/1974 conclue entre le Commissariat Général du Plan (CORDES) et le CEPREMAP.

Nous remercions J.P. LAFFARGUE de ses nombreuses remarques.

S O M M A I R E

I - INTRODUCTION.

La formalisation mathématique de situations concernant la définition de mesures de politique économique est devenue pratique courante. La "théorie de la politique économique", pour reprendre le terme introduit par J. TINBERGEN (TINBERGEN (1952)), a pour ambition particulière d'opérer la réduction de tels problèmes à un cadre conceptuel clair et susceptible d'applications quantitatives.

Si l'on prend un point de vue strictement méthodologique et technique, on peut estimer qu'à bien des égards cette "théorie" de la politique économique a suivi le cours des développements atteints par ailleurs en "théorie de la décision" (pour une présentation, voir par exemple MARSCHAK, RADNER (1972)). Elle en a ainsi intégré progressivement les acquis les plus adaptés à son champ propre. La considération du cas statique et sans incertitude a permis dans unepremière étape d'introduire la distinction désormais classique entre variables objectifs, variables de décision ou instruments, variables non contrôlées (TINBERGEN (1952), (1954)). Ce modèle a conduit en outre à l'énoncé de premières règles ou recettes, d'ailleurs assez sommaires (les "rules of thumb" de TINBERGEN (voir TINBERGEN (1952), (1954) ou HANSEN (1967)). La prise en compte de situations pour lesquelles il y a moins d'instruments que d'objectifs a démontré ensuite la nécessité et l'intérêt de procédures d'optimisation utilisant une "fonction objectif" (TINBERGEN (1956), THEIL (1964)). Le problème de la détermination de telles fonctions constituant d'ailleurs un champ d'investigation propre (voir par exemple FRISCH (1965), GUESNERIE, MALGRANGE (1972), FRIEDLAENDER (1973), JOHANSEN (1974)). Enfin THEIL a été parmi les premiers à intégrer de manière systématique et le dynamique et l'aléatoire (THEIL (1958, 1964)) à partir d'un schéma destiné à devenir une référence : le modèle linéaire-quadratique à erreurs additives. Ce schéma, aux propriétés remarquables ("équivalence au certain" (SIMON (1956), THEIL (1957)), a constitué —et constitue— le support de très nombreuses applications dans des domaines extrêmement divers[1].

./.

---

(1) Un "classique" des applications à des problèmes de gestion d'entreprise étant l'ouvrage de HOLT, MODIGLIANI, MUTH et SIMON (1960).

Depuis quelques années, on observe un regain d'intérêt pour l'application des méthodes d'optimisation aux modèles macroéconomiques de politique économique, et corrélativement à une multiplication des recherches et études sur ce thème (1). L'impulsion de ce mouvement est d'ailleurs venue en partie des progrès réalisés en théorie du contrôle optimal. L'objet de cette note est de faire le point de ces divers developpements.

Pour éviter toute ambiguité ultérieure, soulignons dès à présent que nous situerons notre exposé dans une perspective plus tournée vers les applications économiques que vers les résultats mathématiques et techniques. Il s'ensuit que certains thèmes qui peuvent apparaître comme fondamentaux à des spécialistes du contrôle par exemple, ne sont que très succintement évoqués. De même les développements mathématiques donnés sont volonteirement réduits et font systématiquement appel au corps d'hypothèses le plus simple compatible avec l'éclairage recherché. Le lecteur pourra trouver des compléments dans les diverses références citées.

Ces réserves faites, qu'il est bon de garder en mémoire, notre exposé est divisé en deux parties.

La première partie (paragraphe II) rappelle les principaux concepts de la "théorie de la politique économique" (II-A) et traite du schéma linéaire quadratique (II-B) (2). Ce dernier schéma demeure en effet une référence fondamentale. On abordera ainsi successivement les questions liées à sa spécification (II-B-a), à ses propriétés et au calcul des politiques optimales (II-B-b). En ce qui concerne ce

./.

----

(1) Un échantillon significatif de ces travaux est fourni par les comptes rendus des colloques NBER sur les applications économiques de la théorie du contrôle publiés dans la revue Annals of Economic and Social Measurement (voir les introductions de ATHANS et CHOW (1972), CHOW et ATHANS (1974)).

(2) Dans ce texte nous réservons le terme de schéma linéaire-quadratique à la spécification constituée par une fonction objectif quadratique et un modèle linéaire à erreurs additives.

dernier point, il a paru intéressant de présenter plusieurs approches dont l'équivalence n'a pas toujours été bien perçue ou du moins a été sous évaluée (cf CHOW (1973a)). Enfin, on illustre, à partir de quelques applications, les principaux problèmes posés par l'utilisation du schéma linéaire-quadratique pour des applications quantitatives (II-B-c).

La deuxième partie de notre exposé (paragraphe III), dresse un bilan de travaux récents qui, sur le plan des concepts, techniques ou applications ,débordent des approches précédentes.

Nous traitons tout d'abord du problème général des schémas non "linéaires-quadratiques" (III-A). La considération de tels schémas soulève en effet des questions à la fois conceptuelles et techniques. D'une part, il est licite de s'interroger sur la "robustesse structurelle" des conclusions déductibles du schéma linéaire quadratique. Ces conclusions sont remarquables par leur simplicité. On peut craindre toutefois que, fondées sur des hypothèses très fortes, elles ne puissent être étendues sans abus à des schémas plus complexes. Dans cette perspective, il nous a paru intéressant de présenter relativement en détail le modèle linéaire-quadratique *à erreurs multiplicatives* (3-A-a) . Ce modèle, bien qu'analytiquement simple, permet d'introduire plusieurs concepts étrangers au schéma linéaire quadratique "pur" et donne des conclusions intéressantes pour les applications économiques. La considération de schémas non "linéaires-quadratiques" pose par ailleurs des problèmes techniques liés au calcul des politiques. Cette question est assez rapidement traitée (III-A-b). On s'attachera principalement à distinguer les grands traits des principales voies d'attaque envisageables.

Les deux développements suivants sont consacrés à l'application des méthodes d'optimisation à la "confection" de la politique économique (III-B) et à l'analyse des modèles (III-C). Pour le

./.

premier point, une caractéristique nouvelle de nombreux travaux est d'utiliser ces méthodes d'optimisation pour traiter non de problèmes très amples mais de questions spécifiques. Le rétrécissement du champ d'analyse rapproche, à notre avis, ces travaux d'applications véritablement opératoires. Plusieurs études présentées sont reliées au débat, particulièrement vif aux Etats Unis, sur les mérites comparés de la politique budgétaire et de la politique fiscale. En guise d'introduction (III-B-a), on montre comment, sur ce thème général, on est passé progressivement de la simulation de règles "a priori" inspirées des travaux de Philipps (PHILIPPS (1954)) à des optimisations explicites. On présente ensuite une gamme d'application de ces dernières méthodes au traitement de plusieurs questions particulières, importantes d'un point de vue pratique : problème des délais et de l'instabilité (III-B-b), choix d'indicateurs et prévisions optimales (III-B-c), affectation "instruments-objectifs" (III-B-d).

Outre ces applications à des problèmes de politique économique, les méthodes d'optimisation peuvent également jouer un rôle en matière d'analyse, ou si l'on préfère d'"évaluation", de modèles (cf DELEAU, MALGRANGE (1975)). On montrera (III-C) comment l'utilisation à cette fin des méthodes d'optimisation permet de compléter les informations obtenues par l'application d'autres techniques.

La conclusion (paragraphe IV) résume les développements précédents en dressant un bilan évaluatif.

II - PRINCIPAUX CONCEPTS ET ETUDE DU SCHEMA LINEAIRE-QUADRATIQUE.

A/ La formalisation des problèmes de politique économique.

La "théorie de la politique économique", telle qu'elle a été définie par TINBERGEN (TINBERGEN (1952)), se fonde d'un point de vue méthodologique sur la réduction des problèmes relatifs au choix

./.

de mesures de politique économique à des schémas décisionnels explicités. De manière très générale, de tels schémas sont définis par la donnée des éléments suivants :

- les variables "intervenant" dans le problème ;
- les contraintes auxquelles est confronté le décideur (public) ;
- le critère qui le guide ;
- l'information dont il dispose.

Le lecteur pourra trouver des commentaires sur ces différents élements constitutifs dans plusieurs publications (par exemple DELEAU, GUESNERIE , MALGRANGE (1973), THEIL (1964)). Nous nous limiterons ici à un bref rappel.

. En ce qui concerne les variables, il est classique de distinguer entre :
  - variables "objectifs"(1), qui correspondent aux variables en quelque sorte "finales" intéressant intrinsèquement le décideur ;
  - variables "instruments" ou décisionnelles, c'est-à-dire tous les paramètres dont le décideur a un contrôle direct ;
  - variables non-contrôlées enfin, qui recensent tous les éléments "pertinents" pour le problème de décision considéré et dont la valeur est fixée en dehors du champ d'intervention du décideur.

On notera dans la suite ces diverses variables par les symboles c, d, s. On supposera qu'il s'agit de vecteurs de R^n, R^m , R^p. Etant donné la généralité des définitions , les composantes de ces vecteurs peuvent être relatives à des *dates* différentes. L'explicitation d'un indice de temps ne pose formellement pas de problème et nous recourrons à de telles formalisations *dynamiques*.

. Etant donné cette partition des variables, le décideur "public" peut être confronté dans ses choix à deux premiers types de contraintes. Les unes traduisent le fait que le décideur ne peut pas, éventuellement, prendre "n'importe quelle décision" :

./.

---

(1) Pour une discussion plus complète de la notion de variables objectifs, voir GUESNERIE, MALGRANGE (1972).

il doit se restreindre a priori à un sous-ensemble D de R^n. La donnée de ce sous-ensemble pouvant par exemple traduire des contraintes de nature institutionnelle (voir par exemple HANSEN (1967)). Par ailleurs, le fonctionnement du système économique auquel s'applique le problème étudié est décrit par la donnée d'une relation qui à tout couple variables instruments-variables non contrôlées associe une liste de variables objectifs, soit

$$c = f(d,s) \qquad (1)$$

La fonction f ainsi définie correspond, dans notre contexte, à la donnée d'un *modèle*. Remarquons que la forme (1) est une *forme réduite*(1). Il pourra être intéressant, notamment dans les problèmes dynamiques, de considérer des *formes structurelles explicites*, faisant intervenir notamment des variables intermédiaires (cf variables d'état III-B).

. On admettra en outre, généralement, que le décideur discrimine entre vecteurs de variables objectifs suivant un indice d'utilité u(c). Si les variables non contrôlées ne sont pas "certaines" mais aléatoires (situation de risque), nous considèrerons dans l'exposé ci-dessous que le décideur classe les perspectives risquées suivant le critère de l'espérance mathématique.

. Enfin, dernier élément de la spécification, la donnée de l'information disponible. Il faut en effet définir, pour *chaque variable instrument* d_i (i = 1,...,m) sur quelle information se fonde le décideur pour en fixer la valeur. Deux notions peuvent être concurremment utilisées : celle d'observation (ou de "message" (MARSCHAK, RADNER (1972)) —y_i— ou celle de structure d'information —η_i—. Sans vouloir nous étendre trop longuement sur chacune deces notions (pour plus de détails voir MARSCHAK, RADNER (1972) ou DELEAU, GUESNERIE, MALGRANGE (1975)), disons simplement que la dernière correspond à la définition des évènements "reconnaissables" pour la prise de décision portant sur d_i. En termes mathématiques rigoureux, si l'on désigne par S

./.

---

(1) Le terme "forme réduite" est employé dans ce texte comme traduction de la dénomination "final form" introduite par THEIL (1971). Il désigne la réduction d'un modèle à une forme du type (1), donnant les variables objectifs en fonction directe des variables décisionnelles et des variables non contrôlées.

la σ-algèbre relative aux variables non contrôlées s,
η_i est identifiable à une sous σ-algèbre de S. On montre sans difficulté l'équivalence du raisonnement en termes d'observation ou de structure d'information(1). Il importe en outre de distinguer si l'information est ou non indépendante des choix du décideur. Dans le premier cas, et par référence à un terme connexe employé en théorie du contrôle(2), nous dirons qu'il y a *séparation du contrôle et de l'information*. On verra que cette hypothèse est en particulier satisfaite dans le cas du modèle linéaire-quadratique classique à erreurs additives (II-B). Elle ne l'est plus par exemple pour le modèle à erreurs multiplicatives considéré sur plusieurs périodes (III-A-a)

. En définitive, le choix du décideur se ramène à celui d'une *règle d'action* $\delta(.)$, ou *stratégie* ou *politique*, c'est-à-dire d'une fonction qui à toute valeur des variables non contrôlées associe une mesure d de politique économique $d = \delta(s)$. Le décideur doit évidemment se restreindre à la classe des stratégies admissibles, c'est-à-dire à l'ensemble $\mathcal{D}$ défini comme suit(3) :

$$\mathcal{D} \; = \; \{\delta \mid \delta_i \text{ est } \eta_i\text{-mesurable } \forall\, i \;;\; \delta(s) \in \mathcal{D} \;\forall\, s\}$$

Une *stratégie optimale* est une stratégie admissible rendant maximum $Eu(c)$ sous la contrainte $c = f(d,s)$. On peut également raisonner directement en termes de *fonction de gain* soit

$$\omega(d,s) \; = \; u[f(d,s)] \qquad (2)$$

Notons que pour un problème particulier le calcul explicite des stratégies optimales peut être impossible à atteindre. Il est alors parfois intéressant de se référer à certaines classes de *stratégies sous-optimales*. On en verra des exemples au paragraphe III.

./.

---

(1) Sur ces divers points, voir MARSCHAK, RADNER (1972)

(2) Le terme dont nous nous inspirons est celui, non équivalent, de *séparation du contrôle et de l'estimation*. On reviendra sur ce point.

(3) Les η_i peuvent elles-mêmes "dépendre" des δ_j. Afin de ne pas alourdir les notations, nous n'explicitons pas cette liaison éventuelle.

En guise de conclusion, rappelons brièvement les règles déduites du schéma initial de TINBERGEN, sans incertitude et à objectifs fixés (TINBERGEN (1952)). Ce schéma se ramène formellement au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } (\bar{s}, \bar{c}), \text{ trouver } \bar{d} \text{ tel que} \\ \qquad\qquad \bar{c} = f(\bar{d}, \bar{s}) \end{array} \right.$$

Pour ce cas deux "règles" générales peuvent être énoncées :

Règle 1 : Le nombre des instruments doit être au moins égal au nombre d'objectifs.

Règle 2 : Les mesures prises doivent être coordonnées ; en général, on ne peut pas affecter une décision à un objectif.

On voit que la règle 1 fait appel à des hypothèses de non dégénérescence du modèle, la règle 2 à l'absence de "hiérarchies" particulières (voir par exemple HANSEN (1967)).

Notons que si le modèle est "régulier", il peut y avoir indétermination du choix de $\bar{d}$ lorsque le nombre d'instruments est supérieur au nombre d'objectifs (redondance). On verra en III-A comment l'introduction de l'incertitude sur les effets desinstruments invalide cette remarque et modifie la règle 1.

B/ Une référence fondamentale : le schéma linéaire-quadratique.

a) Spécification.

Depuis les premières publications de THEIL ((1958), (1964)) et HOLT, MODIGLIANI, MUTH et SIMON ((1962)), de nombreux exposés et études ont été consacrés au schéma linéaire-quadratique. Nous en retiendrons ici une spécification dynamique simple postulant la "stationnarité" du modèle et dela fonction objectif. Cette hypothèse simplifie les notations sans restreindre la portée de l'analyse. En outre

./.

nous nous limiterons, sauf indication contraire, au cas d'un horizon fini T.

La spécification retenue est très classique (voir par exemple CHOW (1970), (1972), (1973), PYNDICK (1973), TAYLOR (1970), VIOT (1964)). Elle est définie par les éléments (3) à (5), soit :

$$x(t) = Ax(t-1) + Bd(t) + u(t) \tag{3}$$

$$y(t) = Cx(t-1) + v(t) \tag{4}$$

$$F(x,d) = \sum_{t=1}^{T} (x(t) - \hat{x}(t))' R(x(t) - \hat{x}(t)) \tag{5}$$

Commentons brièvement les caractéristiques de cette spécification :

- $x(t)$, de dimensions $n \times 1$, désigne "l'état" du système à l'instant t ; $d(t)$ $(m \times 1)$ les variables instruments ; $y(t)$ $(q \times 1)$ les observations.

  Notons qu'il n'y a pas identité entre la notion de variables objectifs introduite en III-A, c, et celle de variables d'état, x . En restant à un niveau intuitif, les variables d'état correspondent aux variables dont la prise en compte est nécessaire pour pouvoir représenter le système sous la forme récursive (3) [1]. Il s'agit donc d'une notion reliée à la mécanique du système et non aux préférences du décideur. Le passage variables d'état-variables objectifs peut se faire en incluant une équation de liaison explicite du type $c(t) = Mx(t)$ ou implicitement au niveau de la fonction objectif, certaines variables seulement étant valorisées. Nous adopterons ici ce deuxième point de vue.

./.

---

(1) On peut dans cette perspective se poser des problèmes de représentations, ou réalisations "minimales" c'est-à-dire de représentations telles qu'il n'en existe pas d'ordre inférieure (sur ce point voir OUDET (1975)).

- L'équation (3) est dite *équation d'évolution* du système (*"modèle dynamique"*).
  L'équation (4) définit les observations disponibles à la date t en fonction de l'état. Enfin la fonction objectif F contient comme arguments les variables d'état[1].

- A, B, C, sont des matrices connues avec certitude de dimensions n x n, n x m, n x q . R, de dimensions n x n est supposée (semi) définie positive.
  F définit donc une *notion de coût* dont il faudra minimiser l'espérance.

- u(t) et v(t) sont des variables non contrôlées aléatoires. On pourra également éventuellement supposer x(o) aléatoire.

- $\hat{x}(t)$, est un vecteur certain donnant la valeur "optimale" des variables d'état à l'instant t. On dit parfois que la séquence $\{\hat{x}(t)\}$ définit une *trajectoire de référence*.

Rappelons qu'il est possible de faire rentrer dans ce formalisme le cas de modèles dynamiques autorégressifs spécifiés initialement avec plusieurs délais (voir par exemple CHOW(1971)). La considération de matrices non stationnaires ne pose pas davantage de problème (par exemple VIOT (1964)).

Nous ne discuterons pas longuement ici des limites "économiques" du schéma linéaire-quadratique. On pourra sur ce point se reporter à divers exposés (voir par exemple FRIEDMAN (1973), THEIL (1964)). Notons-en simplement deux, particulièrement importantes :

- d'une part la "symétrie" de la fonction objectif interdit la prise en compte de "ruptures" dans la variation de valorisation des objectifs (voir par exemple FRIEDMAN (1974), WAUD (1976) ;

./.

---

(1) L'inclusion des instruments ne pose pas de problème.

- d'autre part les coefficients du modèle sont supposés connus avec certitude, l'aléatoire n'intervenant que de manière additive. On étudiera en III.A les conséquences de l'abandon de cette deuxième hypothèse.

Les seules contraintes généralement considérées dans le cadre d'un tel schéma sont les contraintes d'information : $d(t)$ ne peut être "fonction" que des observations $y(1),\dots,y(t)$. A priori il peut donc sembler qu'il y ait non séparation de l'information et du contrôle. En effet $d(1),\dots,d(t)$ "contribuent" à la définition de $x(t)$ qui à son tour influence $y(t+1)$. De fait, par suite du *caractère linéaire des équations* (3) *et* (4) *et de la stricte additivité des éléments aléatoires*, on peut démontrer qu'il n'en est rien. Le résultat, dont la démonstration peut être trouvée par exemple dans l'article de VIOT (VIOT (1964)) peut s'énoncer comme suit :

Séparation du contrôle et de l'information :

L'ensemble des politiques admissibles vis à vis des observations sur le système contrôlé est identique à l'ensemble des politiques admissibles vis à vis des observations sur la système non contrôlé.

Autrement dit "toute l'information" est contenue dans la série des $\tilde{y}(t)$ engendrée par le système suivant :

$$\tilde{x}(t) = A\,\tilde{x}(t-1) + u(t) \tag{6}$$

$$\tilde{y}(t) = C\,\tilde{x}(t-1) + v(t) \tag{7}$$

On désignera par $\tilde{\eta}(t)$ la σ-algèbre correspondant à la séquence $(\tilde{y}(1),\dots,\tilde{y}(t))$.
Un contrôle admissible est donc un contrôle tel que $d(t)$ est $\tilde{\eta}(t)$-mesurable pour tout t.

Notons que l'on fait implicitement l'*hypothèse de mémoire* : aucune observation n'est oubliée, $\tilde{\eta}(t+1)$ est "plus fine" que $\tilde{\eta}(t)$ pour tout t. Cette hypothèse est essentielle pour la dérivation du résultat central de "l'équivalence au certain" dont nous allons traiter dans le paragraphe relatif au calcul des politiques optimales (la démonstration donnée par DUCHAN (1974) d'une extension de l'équivalence au certain au cas de "non mémoire" est inexacte).

b) Calcul des politique optimales.

On rappelle qu'une stratégie est dite optimale si elle est admissible et rend la fonction de coût minimum dans la classe des politiques admissibles. Le problème qui se pose est la caractérisation et le calcul de ces politiques.

Pour le premier point, *deux propriétés remarquables* du schéma linéaire-quadratique sont les suivantes :

1. *séparation de "l'estimation" et du "contrôle".*

2. *"équivalence au certain".*

La première propriété signifie que le calcul des politiques optimales, ou plutôt de leur forme fonctionnelle, est indépendant de l'information disponible[(1)]. La seconde qu'à chaque date on peut "faire comme si" les variables non contrôlées étaient réduites à leur moyenne calculée conditionnellement à l'information possédée. Ces moyennes constituent autant d'équivalents certains.

En ce qui concerne le *mode de calcul* lui-même des politiques optimales, deux voies alternatives sont disponibles. Elles sont fondées respectivement sur la forme structurelle (3) du modèle ou la forme réduite associée. Nous commencerons par traiter de cette dernière technique. Elle permet en effet de dégager très rapidement et simplement les propriétés de séparation et d'équivalence au certain.

./.

---

(1) Cette propriété est bien évidemment une conséquence de la séparation de l'information et du contrôle. Elle est vérifiée d'ailleurs pour des systèmes plus généraux que le modèle linéaire-quadratique. (voir WONHAM(1968)).

. Calcul des politiques optimales sur la forme réduite.

Ce procédé est celui suivi par THEIL dans ses différents ouvrages (THEIL (1958), (1964)). Il consiste à opérer des substitutions récursives dans la forme structurelle (3), soit :

$$x(1) = A\,x(0) + B\,d(1) + u(1)$$

$$x(2) = A^2 x(0) + AB\,d(1) + B\,d(2) + Au(1) + u(2)$$

etc.....

On aboutit en définitive à la forme réduite suivante :

$$x = M\,d + s + k \qquad (8)$$

avec $x = \begin{pmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(T) \end{pmatrix}$ $\quad d = \begin{pmatrix} d(1) \\ \vdots \\ d(T) \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} B & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ AB & B & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{T-1}B & A^{T-2}B & \cdots\cdots & B \end{pmatrix} \qquad (n.T) \times (m.T)$$

$$N = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ A & I & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^{T-1} & A^{T-2} & & I \end{pmatrix} \qquad (n.T) \times (n.T)$$

$$k = \begin{pmatrix} A\,x(0) \\ \vdots \\ A^T x(0) \end{pmatrix} \qquad (n.T) \times 1$$

$$s = N\,u \qquad (n.T) \times 1$$

On introduit la notation suivante :

./.

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} R & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & R \end{pmatrix} \qquad (n.T) \times (n.T)$$

La fonction de gain associée à la forme réduite (8) s'écrit :

$$\omega(d,s) = d' \, Q \, d - 2 \, \mu' \, d + K \tag{9}$$

avec

$$Q = M' \, \mathbb{R} \, M \tag{10}$$

$$\mu = -[M' \, \mathbb{R} \, (s + k - \hat{x})] \tag{11}$$

$$K = (s + k - \hat{x})' \, \mathbb{R} \, (s + k - \hat{x}) \tag{12}$$

Le problème, sous forme initiale dynamique, est aussi ramené ainsi à une formulation "statique". Soit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E\omega(d,s) \\ & d(t) \quad \tilde{\eta}(t)\text{-mesurable} \end{aligned} \tag{13}$$

La résolution du système (13) est un problème classique. On en trouvera par exemple un exposé complet dans l'ouvrage de MARSCHAK et RADNER (1972).

On démontre que les conditions générales d'optimalité sont les suivantes (MARSCHAK, RADNER (1972))

$$\sum_{t'=1}^{T} Q(t',t) \, E[d(t') | \tilde{\eta}(t)] = E[\mu(t) | \tilde{\eta}(t)] \qquad t = 1,\ldots,T \tag{14}$$

L'utilisation de *l'hypothèse de mémoire* permet de résoudre ce

Le problème de la stabilité (stochastique)[1] de tels systèmes a été étudié par TURNOVSKY (1974). L'auteur démontre que la présence de bruits sur les paramètres d'un système a pour conséquence une plus grande stabilité des mesures optimales, ce qui est à rapprocher bien évidemment des considérations de précaution introduites précédemment.

b) Calcul de politiques.

Outre la remise en cause de certaines conclusions du schéma Theillien, la considération de schémas non "linéaires-quadratiques" pose le problème du calcul des politiques. A cet égard, la distinction optimisation non stochastique -optimisation stochastique, relativement secondaire pour le schéma linéaire-quadratique, devient extrêmement importante. Pour le cas de l'optimisation non stochastique, il est possible encore, en général, d'envisager le calcul numérique d'une politique optimale, si du moins la taille du problème n'est pas trop importante. La question essentielle qui se pose alors est d'ordre technique et concerne le choix d'un "bon" algorithme d'optimisation. Dans le cas d'optimisation stochastique par contre, il est vain le plus souvent de vouloir calculer une politique strictement optimale. On est généralement contraint d'envisager le calcul de politiques qui, du point de vue du schéma d'ensemble, sont "*sous-optimales*". Nous allons traiter brièvement de chacun de ces cas. Le lecteur pourra trouver des détails supplémentaires dans les références citées.

. Des techniques d'optimisation non-stochastique[2] peuvent être appliquées à des situations pour lesquelles l'incertitude est négligeable, ce qui est rare, ou est "réduite" à des équivalents certains. Dans les termes de la spécification "statique" donnée en III-A, il s'agit de résoudre un problème du type suivant :

$$\text{Max } u(c)$$
$$c = f(d,s) \qquad (36)$$

./.

---

(1) Pour des définitions de stabilité stochastique voir KUSHNER (1974).

(2) Une revue des algorithmes de programmation non-linéaire (avec contraintes sur les variables) est donnée dans l'article de HUARD (1971).

Notons en outre que même pour ce modèle très simple à deux périodes il n'est pas possible de donner une expression analytique exacte de la solution optimale de première période.
Le modèle linéaire-quadratique à erreurs multiplicatives permet ainsi d'appréhender un certain nombre de phénomènes intéressants. Tous ne nous semblent pas toutefois également pertinents pour les problèmes de politique économique. Le souci "d'expérimentation" en particulier est le plus souvent absent de la prise de telles mesures. On imagine mal un Ministre des Finances modifiant un taux d'imposition "pour voir". Beaucoup plus importante par contre nous paraît la notion de précaution ainsi que le résultat connexe obtenu dans le cas de plusieurs instruments. L'implication suivant laquelle l'usage relatif d'un instrument doit prendre en compte non seulement son *effet moyen* mais *l'incertitude* sur cet effet paraît à cet égard tout à fait intéressante. On en trouvera une illustration chiffrée dans l'article de BOWMAN, LAPORTE (1972) pour le cas du modèle de Saint Louis et une seule période. Des applications similaires mais pour plusieurs périodes successives peuvent être trouvées dans les articles de PRESCOTT (1971, 1972) et MAC RAE (1972).
Notons que les politiques étudiées dans ces derniers travaux sont des politiques "sous-optimales" (on a noté précédemment l'impossibilité d'un calcul analytique des politiques optimales).
On reviendra sur ces exemples à la fin du paragraphe suivant.

Quelques mots pour finir sur une autre forme du modèle linéaire-quadratique à erreurs multiplicatives. Plusieurs auteurs ont étudié le cas d'une spécification de la forme suivante :

$$x(t) = A(t)\, x(t-1) + B(t)\, d(t) + \varepsilon(t)$$

avec A(t) et B(t) *matrices stochastiques stationnaires indépendantes de période à période.*
Dans ce cas on démontre (voir CHOW (1973)) que les formules (20), (21) et (23) définissant la procédure habituelle du calcul récursif des politiques optimales s'étendent formellement sans difficulté.

./.

On suppose que m est aléatoire, distribuée suivant la loi normale $N(\overline{m}, \sigma_m^2)$. Cette dernière hypothèse est introduite afin de permettre un calcul analytique des espérances conditionnelles. Dans une optique Bayesienne, on peut considérer que cette loi est une disbritution de probabilité a priori sur la valeur du paramètre m. Les s(t) sont des variables aléatoires indépendantes de lois N(0,1).

Considérons le problème du choix de d(1). La restriction de l'horizon à une seule période conduirait à prendre la mesure d (1) (voir précédemment) :

$$d(1) = \frac{c^*}{\overline{m}} \frac{1}{1 + 1/h_m^2}$$

Cette décision ne sera toutefois pas optimale en général. En effet la "précision" sur la "mesure" de m en deuxième période dépend de la décision de deuxième période. Soit en effet m(2) la variable aléatoire $(m|md(1) + s(1))$.
Cette variable est normale, de loi $N(\overline{m}(2), \sigma^2_{m(2)})$.
On obtient sans difficulté les formules suivantes (voir PRESCOTT (1972))

$$\frac{1}{\sigma^2_{m(2)}} = \frac{1}{\sigma^2_m} + d^2(1) \tag{34}$$

$$\frac{\overline{m}(2)}{\sigma^2_{m(2)}} = \frac{\overline{m}}{\sigma^2_m} + d(1)\, c(1) \tag{35}$$

On en déduit en particulier

$$h^2_{m(2)} = \frac{\left[\frac{\overline{m}}{\sigma^2_m} + d(1)\, c(1)\right]^2}{\frac{1}{\sigma^2_m} + d^2(1)}$$

Autrement dit la "précision" sur m en deuxième période, qui commande à la fois la décision optimale correspondante (formule (27)) et la perte associée, n'est pas indépendante de la décision prise en première période. Il peut y avoir, pour cette décision, un antagonisme entre "stabilisation", c'est-à-dire réalisation d'un "bon"niveau d'objectif en première période et "acquisition d'information" pertinente pour la décision de deuxième période.

contiennent évidemment les deux cas extrêmes où l'on ne se sert que d'un seul instrument.

Un calcul immédiat démontre que la prise en compte de l'incertitude sur m_1 et m_2 conduit de fait à retenir les mesures suivantes

$$d_1 = \frac{c^*}{\bar{m}_1} \frac{1}{1 + 1/h^2_{m_1} + h^2_{m_2}/h^2_{m_1}} \qquad (30)$$

$$d_2 = \frac{c^*}{\bar{m}_2} \frac{1}{1 + 1/h^2_{m_2} + h^2_{m_1}/h^2_{m_2}} \qquad (31)$$

La prise en compte de l'incertitude sur les *effets* des instruments 1 et 2 conduit donc à utiliser *simultanément* ces deux instruments alors que dans le schéma "moyen" il y a redondance. On note que l'ampleur relative de chaque mesure prend en compte la *précision relative* dans l'évaluation des effets.

Les calculs et conclusions s'étendent sans difficulté au cas d'un nombre d'objectifs et d'instruments quelconque, soit :

$$c = M\,d + s \qquad \text{où } M \text{ est } m \times m \qquad (32)$$

On note Σ^{ij} la matrice $(m \times m)$ dont l'élément courant $\sigma^{ij}_{kk'}$ est égal à Cov $(m_{ik}, m_{jk'})$. Pour une fonction objectif de la forme $u(c) = (c - c^*)' C (c - c^*)$, on montre sans difficulté que la décision optimale d^* est solution du système[1] :

$$(\bar{M}' C \bar{M} + \sum_{i,j} c_{ij} \Sigma^{ij})\, d^* = \bar{M}' C c^* \qquad (33)$$

. Le modèle à un objectif-un instrument et deux périodes.

Soit donc le modèle :

$$y(t) = m\, d(t) + s(t) \quad , \quad t = 1,2$$

$$u(c(1),c(2)) = (c(1) - c^*)^2 + (c(2) - c^*)^2$$

Ce modèle est formellement identique au modèle considéré plus haut mais il prend en compte deux dates.

./.

---

(1) La matrice $\sum_{i,j} c_{ij} \Sigma^{ij}$ étant définie positive on voit sans peine que $d^* = d^{EC} - H\, d^{EC}$ où d^{EC} est la décision correspondant à l'équivalence au certain et H une matrice définiepositive. Une étude (locale, au voisinage de $\Sigma^{ij} = 0$, $\forall$ i,j) du signe de $d^*_k - d^{EC}_k$ k = 1,...,m est donnée dans un article récent de Young (1975).

$$d^* = \frac{c^*}{\overline{m}} \frac{1}{1 + \frac{1}{h_m^2}} \qquad (27)$$

c'est-à-dire à un maniement de la mesure d'autant plus "prudent" que ses effets sont "mal connus". La prise en compte de l'incertitude sur les *effets* d'un instrument incline donc à une plus grande *précaution* dans son maniement.

. Le modèle statique à un objectif-deux instruments : la remise en cause de la première règle de TINBERGEN.

Considérons maintenant le modèle à un objectif-deux instruments, limité encore au cas d'une période, (voir BRAINARD (1972)) :

$$c = m_1 d_1 + m_2 d_2 + s \qquad (28)$$

avec comme précédemment :

$$u(c) = (c - c^*)^2 \qquad (29)$$

On fera les hypothèses stochastiques suivantes :

$$E\, m_1 = \overline{m_1} \qquad E\, m_2 = \overline{m_2} \qquad E\, s = 0$$

$$\mathrm{Var}(m_1) = \sigma^2_{m_1} \qquad \mathrm{Var}(m_2) = \sigma^2_{m_2} \qquad \mathrm{Var}\, s = 1$$

$$\mathrm{Cov}(m_1, m_2) = \mathrm{Cov}(m_1, s) = \mathrm{Cov}(m_2, s) = 0$$

La réduction au certain reviendrait à considérer le modèle statique suivant :

$$c = \overline{m_1}\, d_1 + \overline{m_2}\, d_2$$

semblable au schéma initial de TINBERGEN.
Pour ce modèle les conditions de la règle 1 sont en un sens satisfaites. Néanmoins la règle conduit à une indétermination. Il est en effet équivalent de choisir n'importe quelle combinaison (d_1, d_2) satisfaisant $c^* = \overline{m_1}\, d_1 + \overline{m_2}\, d_2$. Ces combinaisons

./.

d'introduire au *problème de la non séparation estimation-contrôle* et des *antagonismes possibles entre stabilisation et acquisition d'information.*

. Le modèle statique à un objectif-un instrument.

Soit donc le modèle statique, considéré sur une période,

$$u(c) = (c - c^*)^2 \tag{25}$$

$$c = m\,d + s \tag{26}$$

Autrement dit on souhaite atteindre l'objectif c^* disposant de l'instrument d. Contrairement au schéma Theillien (ou de TINBERGEN) on suppose cette fois que s *et* m sont aléatoires de caractéristiques suivantes :

$$E\,m = \bar{m}$$

$$E\,s = 0$$

$$\mathrm{Var}\,(m) = \sigma_m^2$$

$$\mathrm{Var}\,(s) = 1\,.$$

$$\mathrm{Cov}\,(m,s) = 0\,.$$

L'application directe de l'équivalence au certain conduirait à recommander la mesure

$$d^{EC} = \frac{c^*}{\bar{m}}$$

L'espérance de perte correspondante est égale à

$$E^{EC}\,u = \frac{c^{*2}}{h_m^2} + 1 \qquad \text{avec } h_m = \frac{\bar{m}}{\sigma_m}$$

On voit que si la précision d'estimation h_m est faible, la politique d'équivalence au certain peut donner de très mauvais résultats.

La prise en compte effective de l'incertitude sur m conduit à la décision optimale suivante :

./.

III - DEVELOPPEMENTS RECENTS.

A/ La prise en compte de schémas non "linéaires-quadratiques".

a) Le schéma à erreurs multiplicatives : contrôle, précaution et information.

Le modèle linéaire-quadratique à erreurs additive possède, on l'a vu, de nombreuses propriétés remarquables. Nous allons voir dans ce paragraphe, sur la base d'un modèle très simple, comment ces propriétés s'altèrent lorsque certaines hypothèses fondamentales sont modifiées. La question est loin d'avoir un intérêt seulement théorique. Il est important en effet, d'un point de vue pratique, de savoir dans quelle mesure les conclusions obtenues dans le cadre du schéma Theillien pur sont "robustes".

Même si l'on conserve la forme fonctionnelle générale du schéma Theillien, une limite immédiate d'application est l'hypothèse d'absence d'incertitude sur les paramètres du modèle. Il est rare en effet que, pour des modèles économétriques linéaires (supposés bien spécifiés), l'échantillon d'estimation soit suffisamment long pour rendre négligeable l'erreur d'estimation sur les paramètres. D'où l'idée naturelle d'étendre le schéma Theillien au cas d'erreurs intervenant de manière multiplicative : les matrices A et B de l'équation (3) ne sont plus considérées comme certaines mais entâchées d'incertitude.

Les propriétés de ce modèle linéaire-quadratique à erreurs multiplicatives ont été étudiées par divers auteurs (par exemple BRAINARD (1967), JOHANSEN (1973), PRESCOTT(1972)). On aurait pu en faire d'emblée un exposé général. Il a paru pédagogiquement préférable de décomposer la présentation en trois modèles très simples. Le premier, statique, à un objectif-un instrument, permet de mettre en évidence la notion de "*précaution*" dans l'usage des instruments. Le deuxième modèle, statique également, à un objectif-deux instruments, démontre comment la première règle de TINBERGEN se trouve modifiée. Enfin la considération de plusieurs périodes permet

./.

. La détermination de la fonction objectif est une tâche beaucoup plus délicate, d'autant que l'ambition est ici de refléter de manière aussi pertinente que possible les "préférences" d'un décideur donné. L'approche suivie dans Optimix a consisté à "révéler" une telle fonction, dite fonction objectif du Plan, par combinaison d'interviews et de méthodes d'optimum inverse (GUESNERIE, MALGRANGE (1972)). Une approximation quadratique de la fonction obtenue a été ensuite réalisée au voisinage d'une trajectoire de référence. THEIL, qui spécifie *trois* fonctions objectif (syndicats, gouvernement, employeurs), se fonde sur la donnée de trajectoires "désirées". Les fonctions objectif retenues pénalisent les déviations par rapport à ces trajectoires, avec quelques modulations intertemporelles traduisant une "compensation" entre périodes et une "régularité" des mesures.

. Une fois le modèle linéaire et la fonction objectif obtenus, le calcul des politiques optimales ne pose pas de problème (simplicité analytique des formules correspondantes (II.B.c)). Notons que pour les deux études citées le calcul utilise la *forme réduite* du modèle. La démarche habituellement suivie est d'obtenir successivement :

- la politique optimale moyenne et la trajectoire optimale moyenne associée ;
- la politique optimale contraléatoire et les caractéristiques stochastiques du système.

Pour Optimix, on identifie les premiers résultats à la définition d'un *cheminement moyen* du Plan, les seconds à la spécification de *règles de politique conjoncturelle* devant "défendre au mieux" ce cheminement contre les aléas. Notons qu'il peut être instructif de se livrer à des calculs de sensibilité "au voisinage" de la spécification initiale (voir THEIL (1964)). On peut en outre faire varier l'information conditionnant les politiques et étudier ainsi des schémas de révision périodique, les conséquences de délais de réaction, l'affectation d'instruments à des aléas spécifiques etc... (DELEAU, MALGRANGE (1972), (1974a)).

./.

c) Quelques exemples d'application.

Le schéma linéaire-quadratique pur qui vient d'être présenté a été utilisé dans de nombreuses études. Nous ne traiterons pas ici des applications qui en ont été faites à des questions de gestion d'entreprise . Nous nous limiterons à des exemples de politique économique. Plus spécifiquement, on commentera dans ce paragraphe certains problèmes soulevés par l'application dece schéma au choix de mesures *globales* de politique économique pour un *décideur donné*. On verra en III.B que d'autres utilisations sont envisageables, qui traitent de questions plus restreintes ou cherchent à obtenir des conclusions plus générales en matière de régulation d'un système. Les travaux qui nous serviront à illustrer cette première approche sont constitués par l'étude de THEIL sur la régulation de l'Economie Hollandaise pour une période triannuelle (54-57) (THEIL(1964)), et par l'opération "Optimix' qui a proposé une certaine formalisation de la liaison entre Budget et Plan pour desdonnées relatives au VIème Plan Français (DELEAU, GUESNERIE, MALGRANGE (1973)). Nous traiterons successivement des questions liées au modèle, à la fonction-objectif et au calcul de politiques.

. L'obtention d'un modèle linéaire est probablement l'étape la plus facile du processus, pour autant bien sûr que l'on dispose au départ d'un modèle macroéconomique de politique économique (modèle de VERDOORN - VAN EIJK dans l'étude de THEIL, DECA dans Optimix). La seule difficulté technique que l'on puisse rencontrer à ce niveau est la présence de non-linéarités dans le modèle initial. Le procédé habituellement retenu (1) revient à réaliser une approximation linéaire du modèle au voisinage d'une trajectoire donnée soit par linéarisation directe des équations (THEIL) soit par simulation (calcul des multiplicateurs Optimix). [illegible] que pour la plupart des modèles l'approximation linéaire apparaît très largement valide dans la plage de variation des variables. Enfin l'identification des variables non contrôlées et de leurs caractéristiques stochastiques s'appuie en général sur une approche économétrique. Les variables incertaines sont identifiées aux variables résiduelles des relations du modèle, (ou de certaines d'entre elles seulement) et les moments du second ordre estimés sur le passé.

./.

---

(1) D'autres techniques seront présentée en III.A.

. Comparaison des deux types de méthodes.

Bien que certains auteurs aient parfois considéré que l'approche de THEIL ne s'appliquait qu'aux calculs relatifs à la première période (voir par exemple les commentaires de CHOW (1973a)), il va de soi que les diverses méthodes présentées ci-dessus sont mathématiquement strictement équivalentes et peuvent être en principe utilisées indifféremment. NORMAN (1974) a démontré explicitement, s'il en était besoin, l'identité des résultats des calculs conduits par la méthode sur forme réduite ou par les équations récurrentes (20),(21). Il apparaît donc évident que le seul critère devant guider le choix de la méthode est un critère d'ordre pratique prenant en compte le coût de calcul associé.

Si le nombre d'instruments n'est pas trop élevé, non plus que l'horizon, la méthode sous forme réduite est particulièrement fiable et d'application simple puisqu'il suffit de disposer d'un bon algorithme d'inversion de matrice. Il va de soi que pour des problèmes où l'horizon est important (par exemple dans le cas de modèles trimestriels pris sur une dizaine d'années) il peut devenir nécessaire de passer par des méthodes récurrentes. Ceci est vrai en particulier lorsqu'on s'intéresse au contrôle optimal "stationnaire" d'un système, associé donc théoriquement à un horizon infini. Les formules récurrentes sont alors évidemment d'un usage beaucoup plus simple (voir CHOW (1972b)), bien que l'approche par la forme réduite demeure possible (voir THEIL (1964)).

./.

$$h(t) = R\,\hat{x}(t) + A'[I - H(t+1)\,B(B'H(t+1)\,B)^{-1}\,B']\,h(t+1) \qquad (23)$$

avec

$$h(T) = R\,\hat{x}(T) \qquad (24)$$

Les symboles $\tilde{x}(t-1)$ et $\tilde{u}(t)$ désignent les espérances de $x(t-1)$ et $u(t)$ conditionnelles à l'information $\tilde{\eta}(t)$ disponible à t. Des expressions analytiques de ces "*estimations*" peuvent être obtenues pour des hypothèses spécifiques sur $\tilde{\eta}(t)$. Une hypothèse fréquemment faite consistant à admettre l'observabilité de $x(t-1)$ et la non observabilité de $u(t)$, auquel cas :

$$\tilde{\tilde{x}}(t-1) = x(t-1) \qquad \tilde{\tilde{u}}(t) = 0.$$

Notons en outre que pour le cas de variables aléatoires $u(t)$ et $v(t)$ *Gaussiennes*, il est possible d'obtenir des formules d'estimation linéaire *récursives* ("filtres de KALMAN"), qui permettent d'établir un parallèle formel entre estimation et contrôle (pour une application à un modèle de gestion de stocks avec une interprétation en termes de délais de réaction "optimaux" voir TAYLOR (1970)).

./.

puisse y avoir intérêt, *sur le seul plan technique*, à rechercher des méthodes de calcul récurrent du type de celles présentées ci-dessous. Il faut néanmoins souligner que, *même pour la forme réduite*, il est possible de procéder à des calculs récurrents évitant l'inversion de matrices trop importantes (VAN DE PANNE (1965)).

. Calcul des politiques optimales sur la forme récursive.

Au lieu de recourir à la forme finale associée au système (3), il est possible de calculer les politiques optimales de manière récursive directement en fonction des caractéristiques de la forme structurelle.

D'un point de vue technique, deux classes de méthodes peuvent être utilisées pour obtenir les formules correspondantes :

- soit des méthodes de type "variationnel" fondées sur la construction d'un Lagrangien (par exemple CHOW (1970), (1972a), (1972b), VIOT (1964)) ou d'un Hamiltonien (par exemple PYNDICK (1973a), (1973b)) ;
- soit des méthodes de type "programmation dynamique" (par exemple CHOW (1972b), VIOT (1964)) utilisant le principe d'optimalité de BELMANN (BELLMANN (1957)).

On aboutit en définitive à l'expression suivante de la politique optimale à la période t :

$$d(t) = -(B'H(t)\,B)^{-1}\,B'[H(t)[A\,\tilde{\tilde{x}}(t-1) + \tilde{\tilde{u}}(t)] - h(t)] \qquad (20)$$

où H(t) est une matrice (semi) définie positive satisfaisant le système récurrent suivant :

$$H(t) = R + A'[H(t+1) - H(t+1)\,B(B'H(t+1)B)^{-1}\,B'H(t+1)]\,A \qquad (21)$$

avec

$$H(T) = R \qquad (22)$$

et h(t) un vecteur donné par l'équation (23) dite "équation de poursuite" :

./.

---

(1) On peut noter l'analogie formelle de la formule (20) relative à la période t avec une formule de type "statique" ($(M'\,C\,M)^{-1}\,M'C$).

- $d^1(t)$ est la "correction" apportée à la période 1 sur la base de l'information $\tilde{\eta}(1)$. Cette correction se fonde sur l'information supplémentaire que contient $\tilde{\eta}(1)$ par rapport à l'information nulle (terme à droite de (17)). De même pour $d^2(t),\ldots,d^{t'}(t)$ $t' \leq t$ La statistique sur laquelle se fonde la correction de la période t' est la différence entre les espérances conditionnelles de $\mu(t')$ relatives à l'information disponible respectivement à t' et t'-1.

b) Par ailleurs, on voit aisément que

$$E[d(t)|\eta(t')] = d^0(1) + \ldots + d^{t'}(t) \ , \quad t' \leq t$$

Autrement dit la somme des t'+1 premières "corrections" est égale à la "prévision moyenne" à la date t' dela décision optimale à t. Revenant au système (14) et considérant l'écriture de ce système pour $t' = t,\ldots,T$, on voit en appliquant l'opérateur $E[.|\eta(t)]$ que, du fait de l'hypothèse de mémoire, la décision optimale à t n'est autre que la décision optimale de première période pour le problème pris sur l'intervalle $[t,T]$, compte tenu des décisions passées *connues* ($E[d(t")|\eta(t)] = d(t")$ pour $t" < t$) et pour des variables non contrôlées réduites à leur valeur moyenne étant donné l'information possédée à t. Ceci n'est autre que le principe d'équivalence au certain pour la période t.

Notons en outre que la forme fonctionnelle des politiques optimales en fonction des estimations est indépendante de la structure d'information considérée (formules (11) et (19)). On vérifie ainsi qu'il y a bien *séparation de l'estimation et du contrôle.* Le calcul même des estimateurs, indépendant du calcul des politiques de contrôle, dépendra des hypothèses stochastiques faites sur la série des $(u(t),v(t))$. Si par exemple des hypothèses de Gaussianité sont faites, on aboutira à des formules de type linéaire.

c) Enfin notons que le calcul des politiques optimales suivant le schéma présenté ci-dessus nécessite a priori l'inversion de matrices de taille m x T (matrice Q), m x T-1 (matrice $Q^{(2,2)}$), etc.... Si T est grand (modèle trimestriel par exemple), l'inversion directe de ces matrices peut poser problème. On comprend donc qu'il

./.

système de *manière récursive*[1] en appliquant successivement les opérateurs $E[.|\eta_o]$ (où η_o désigne l'information nulle), $E[.|\eta(1)],\ldots, E[.|\eta(T)]$.
On voit aisément que la solution optimale est de la forme :

$$d(t) = d^o(t) + d^1(t) + \ldots + d^{t'}(t) + \ldots + d^t(t) \qquad (15)$$

$d^o(t)$ correspond aux composantes relatives à la date t du vecteur d^o solution du système S_o

$$S_o \qquad Q\, d^o = E\mu \qquad (16)$$

$d^1(t)$ est de même associé au (sous) système S_1

$$S_1 \qquad Q\, d^1 = E[\mu|\eta(1)] - E\mu \qquad (17)$$

$d^2(t)$ au (sous) système S_2[2]

$$S_2 \qquad Q^{(2,2)}\, d^2 = E[\mu^{(2)}|\eta(2)] - E[\mu^{(2)}|\eta(1)] \qquad (18)$$

....

$d^{t'}(t)$ au sous système $(t' \leq t)$

$$S_{t'} \qquad Q^{(t',t')} d^{t'} = E[\mu^{(t')}|\eta(t')] - E[\mu^{(t')}|\eta(t'-1)] \qquad (19)$$

La formule (15) appelle un certain nombre de remarques :

a) On voit tout d'abord que la décision optimale à t peut être interprétée comme une somme de "corrections" :

- $d^o(t)$ est la décision optimale à prendre à t en cas d'information constamment nulle (système S_o). On peut noter que la valeur moyenne de toute poli· .que optimale est égale à la politique optimale "moyenne" c'est-à-dire la politique qu'il serait optimal de suivre si les variables aléatoires non contrôlées étaient réduites à leur espérance (formule (16)).

./.

---

(1) En effet si $t < t'$ $\eta(t) \subset \eta(t')$. D'où $E[E[\cdot|\eta(t')]|\eta(t)] = E[\cdot|\eta(t)]$
$E[E[\cdot|\eta(t)]|\eta(t')] = E[\cdot|\eta(t)]$.

(2) $Q^{(t',t')}$ désigne la matrice de dimensions $m.(T-t+1) \times m.(T-t+1)$ obtenue à partir de Q par suppression des $m(t-1)$ premières lignes et colonnes. De même $\mu^{(t')}$ est le vecteur obtenu en supprimant les $m(t'-1)$ premières composantes du vecteur μ.

Si la spécification de départ est dynamique, se pose en outre le problème, déjà apparu pour le schéma linéaire-quadratique, de l'alternative *technique* : optimisation récurrente ou optimisation sur la forme réduite.

Sur ce point il semble dans bien des cas pertinent de suivre la position défendue par FAIR (FAIR (1974)). Cet auteur propose de ramener tout problème à *une forme finale du type* (36) et d'opérer sur *la fonction de gain* $\omega(d,\bar{s}) = u\,[f(d,\bar{s})]$. On réduit ainsi le problème initial à un problème d'optimisation statique, *sans contrainte*. La "taille" de ce problème dépend notamment de dimensions du vecteur d, c'est-à-dire pour une situation dynamique du nombre d'instruments disponibles à chaque date et de l'horizon. Le problème ainsi réduit peut alors être résolu à l'aide de divers algorithmes. Dans son étude FAIR compare ainsi les temps de calcul de divers algorithmes. A titre d'exemple l'algorithme utilisé dans l'opération Optimix pour calculer un cheminement optimal "moyen" réalisait une certaine approximation quadratique de la fonction de gain. Notons que des caractéristiques particulières de la structure envisagée peuvent conduire à utiliser des algorithmes spécifiques. Citons par exemple l'article de FRIEDMAN (1973) où pour le cas d'un modèle linéaire et sans incertitude l'auteur considère des fonctions objectifs "quadratiques par morceaux". La considération de telles fonctions permet bien évidemment d'appréhender certaines ruptures dans la valorisation des objectifs. Dans ce cas, le schéma d'ensemble peut être traité à l'aide d'un algorithme particulier qui consiste en une résolution itérative de schémas linéaires-quadratiques "purs".

. Dans le cas d'une considération explicite de l'incertitude, il n'est pas possible en général pour un schéma non "linéaire-quadratique" de calculer explicitement la politique optimale associée. On peut tout au mieux espérer en obtenir une "approximation". Pour ce faire, deux voies alternatives sont envisageables. La première consiste à calculer une politique optimale pour un schéma qui est lui-même une approximation du schéma initial, la seconde à se restreindre d'emblée à certaines classes de politiques.

./.

La première solution revient de fait en général à utiliser une approximation "linéaire-quadratique" du schéma initial en évaluant une approximation linéaire du modèle initial et une approximation quadratique de la fonction objectif. Le modèle peut lui-même être linéarisé pour ainsi dire "avant" ou "après" incertitude. Dans le premier cas, on considère une trajectoire certaine $\bar{c}$ associée à des valeurs données des variables instruments $\bar{d}$, et des variables non contrôlées $\bar{s}$. Cette trajectoire peut d'ailleurs être elle-même la trajectoire optimale pour les paramètres incertains réduits à leur valeur moyenne (Cf. ATHANS (1972), GARBADE (1975)).
On considère alors le modèle variantiel suivant (pris sous forme réduite)

$$c - \bar{c} = A\,(d - \bar{d}) + B\,(s - \bar{s}).$$

Les A et B résultent eux-mêmes soit d'une linéarisation équation par équation du modèle (tangente) soit de résultats de simulations (corde : on fait $\Delta d_1 = \varepsilon$ d'où Δc d'où $A_{.1} = \Delta c/\varepsilon$ etc..) (voir DELEAU, MALGRANGE (1975)).
La fonction objectif étant elle-même remplacée par une approximation quadratique au voisinage de $\bar{c}$, on peut sur le schéma linéaire-quadratique ainsi construit conduire les calculs présentés en II-B. Bien qu'il soit impossible sauf dans des cas précis de mesurer la perte en optimalité due à l'approximation on peut l'estimer faible pour autant que le modèle ne soit pas "trop" non-linéaire, ni l'incertitude trop importante et que l'on reste dans une zone sans discontinuité majeure de valorisation des objectifs. Conditions remplies en pratique si l'on se pose un problème de stabilisation conjoncturelle autour d'une trajectoire de référence.
Un tel procédé a été appliqué dans de nombreuses études (voir par exemple les études commentées en II.B.c).

On peut également chercher à réaliser une approximation linéaire du modèle qui tienne compte en quelque sorte des effets conjoints de l'incertitude et des non-linéarités. Le procédé proposé par COOPER et FISCHER (1975) peut être rapproché de remarques méthodologiques de HOWREY et KELEJIAN sur les modèles stochastiques non linéaires (1969)[(1)]. Il revient grosso modo à réaliser des simulations stochastiques du modèle c = f(d,s) en générant des échantillons des variables d et s, suivant des lois correspondant par exemple aux observations passées. On réalise *ensuite* une *estimation économétrique* d'une forme linéaire du type précédent. Cette forme obtenue, le déroulement des calculs se fait classiquement. Un tel procédé est par exemple suivi dans l'étude de OUDET consacrée au modèle STAR (OUDET (1975))[(2)].

Dans le cas de schémas "non linéaires-quadratiques", on peut également se restreindre a priori à certaines classes de politiques et chercher soit par tâtonnement, soit par calcul explicite une "bonne" politique dans cette classe. La première approche a été

./.

---

(1) Ces auteurs soulignent que pour de tels modèles le fonctionnement *moyen* du modèle stochastique peut être très éloigné du fonctionnement du modèle *moyen*.

(2) Le lecteur pourra trouver d'autres exemples d'algorithmes de résolution applicables à des *modèles non linéaires* dans les articles de HOLBROOK (1974) et CHOW (1975). Ces deux auteurs considèrent le cas de fonctions objectifs quadratiques. La problèmatique générale des algorithmes proposés repose sur *une linéarisation itérative* du modèle, considéré sous forme réduite par HOLBROOK et sous forme dynamique récursive par CHOW. Les algorithmes sont applicables au cas de modèles stochastiques et prennent alors (partiellement) en compte l'incertitude sur les effets des instruments (aspect "précaution" mais non considération de l'acquisition d'information via le contrôle). On trouvera une illustration numérique dans l'article de HOLBROOK (1975).

fréquemment suivie dans des études s'inspirant dela problématique de PHILIPPS (1954, 1957). Des exemples en seront fournis au paragraphe suivant. En ce qui concerne le deuxième procédé (calcul explicite d'une "bonne" politique sous-optimale), un traitement relativement systématique du problème existe pour le cas du schéma à *erreurs multiplicatives* et plusieurs périodes considéré précédemment, soit :

$$c(t) = m\, d(t) + s \qquad , \qquad m \text{ aléatoire.}$$

On note :

- $m(1)$, $\sigma^2(1)$ la moyenne et variance "a priori" de la variable aléatoire m ;

- $m(t)$, $\sigma^2(t)$ les moyenne et variance de la variable m conditionnelle à l'observation de $c(1)$, $d(1)$;...; $c(t-1)$, $d(t-1)$.

On peut envisager les politiques sous-optimales suivantes :
- politique d'équivalence au certain, sans révision ni précaution :

$$d(t) = \frac{c^*}{m(1)}$$

- politique d'équivalence au certain avec révision mais sans précaution :

$$d(t) = \frac{c^*}{m(t)}$$

- politique avec révision et précaution mais sans prendre en compte l'impact sur l'information future :

$$d(t) = \frac{c^*}{m(t)} \; \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma^2(t)}{m^2(t)}}$$

Ces diverses politiques, ont été étudiées et appliquées dans plusieurs articles (BOWMAN, LAPORTE (1972), PRESCOTT (1971), (1972)). Le lecteur pourra trouver par ailleurs des propositions de politiques sous-optimales prenant (partiellement) en compte l'impact d'une décision sur l'information future dans les références suivantes : MAC RAE (1972,1975), TSE (1974), EL FATTAH, FOULARD (1975), KENDRICK, KANG (1975).

B/ Application des méthodes d'optimisation à la "confection" de la politique économique.

a) L'exemple du débat "politique monétaire ou politique fiscale" : de la simulation à l'optimisation.

Le problème des mérites comparés des politiques monétaire et fiscale pour la régulation conjoncturelle a fait l'objet d'un vif débat aux Etats-Unis à partir des années 68-70 (1).

Ce problème pose bien évidemment, tout d'abord, des *questions d'ordre empirique*, liées à l'estimation des "effets" de mesures monétaires et fiscales, à l'identification de leur importance et de leur modulation temporelle.
Nous ne traiterons pas ici de ces thèmes, importants et délicats. Le lecteur intéressé trouvera un exposé clair des approches alternatives (spécifications structurelles ou réduites), des difficultés rencontrées et des résultats obtenus dans l'article de GRAMLICH (1971) (voir aussi les commentaires de SHAPIRO (1971) et l'article de DAVID (1972) pour le cas dela France).

Par delà ces problèmes de spécification et d'estimation, le débat politique monétaire ou politique fiscale touche à un deuxième type de questions concernant la définition, la *"confection" d'une "bonne" politique conjoncturelle*. On conçoit en effet qu'une forme relativement spécifique des "fonctions de réponse" associées à chaque type d'instrument puisse en commander un usage relativement différencié. Des conclusions quantitatives peuvent être atteintes dès lors que l'on dispose d'un modèle intégrant ces instruments.
Se pose alors la question du choix d'une *technique d'utilisation* du modèle, *choix qui peut ne pas être neutre vis à vis des conclusions atteintes* et soulève l'alternative : simulation ou optimisation ? L'objet de ce premier paragraphe est de montrer, à partir d'un certain nombre de travaux, comment ces deux techniques ont été utilisées pour répondre au problème économique soulevé, quels en sont les coûts et les avantages respectifs.

./.

---

(1) Ce débat est consécutif à l'échec de la "surtaxe" pratiquée en 1968.

Une bonne illustration des possibilités offertes par le recours aux techniques de simulation, ainsi que de leurs limites, est fournie par la série des articles de COOPER et FISCHER (1972a, 1972b , 1974). La problématique fondamentale de ces divers articles est identique. Les auteurs spécifient au départ une classe de politiques monétaires et fiscales, dont la forme fonctionnelle s'inspire de la typologie de PHILIPPS (1954, 1957) (distinction entre contrôles "proportionnels" et "différentiels"). Cette spécification effectuée, la nature même des simulations peut différer : simulations purement déterministes (1972a), à chocs stochastiques additifs (1972b), "totalement" stochastiques (1974) (c'est-à-dire prenant en compte l'incertitude sur les coefficients du modèle).

Quel que soit le mode de simulation retenu, les auteurs procèdent par tâtonnements successifs sur la valeur des paramètres définissant les politiques et cherchent à obtenir des politiques "efficaces" de stabilisation, l'efficacité d'une politique étant appréciée à travers le calcul d'"écart types" relatifs aux déviations observées par rapport à une trajectoire de référence. A titre indicatif on peut noter que les auteurs concluent ainsi à la supériorité de l'instrument monétaire par rapport à l'instrument fiscal en matière de régulation conjoncturelle pour le modèle de Saint Louis (ce qui n'est pas très surprenant a priori). Les règles "différentielles" qui prennent en compte les *variations* des variables macroéconomiques ("leaning against the wind") paraissent plus efficaces en général que les règles "proportionnelles" qui retiennent les *niveaux*.

Ces divers travaux illustrent bien les *deux avantages principaux* des méthodes de simulation : *la facilité de mise en oeuvre, l'universalité d'application.*

Pour le premier point, il suffit de noter que ces méthodes peuvent être utilisées dès lors que l'on possède un algorithme de résolution du modèle, l'"injection" de règles a priori ne posant pas de problème sérieux.

Par ailleurs, elles s'appliquent à des situations très diverses —par exemple au cas des paramètres incertains (COOPER, FISCHER (1974))— situations dans lesquelles une application directe des méthodes d'optimisation peut être très délicate, voire impossible (III.A.a).

Les méthodes de simulation si elles ont des *avantages techniques* évidents, sont beaucoup moins sûres par contre en ce qui concerne la *pertinence économique* des résultats obtenus. Revenons au problème économique considéré, à savoir *l'efficacité relative* des instruments monétaires et fiscaux en matière de stabilisation. La classe des politiques utilisées en simulation étant définie a priori, rien ne garantit qu'elle correspond nécessairement à des situations où les mesures sont prises "au mieux". Il se peut parfaitement qu'il existe d'autres modalités de fixation de ces mesures qui aboutissent à des effets strictement préférables. D'où deux dangers possibles. D'une part les conclusions obtenues sur l'efficacité relative de chaque instrument sont sujettes à caution, puisque les règles de simulation définies a priori peuvent conduire à un maniement artificiellement mauvais d'un des deux instruments et donc à une fausse supériorité de l'autre. D'autre part, pour un instrument donné, la restriction à une classe de politiques a priori peut laisser échapper tout un ensemble de conclusions intéressantes sur la manière dont il "faudrait" le mettre en oeuvre suivant les délais de réaction correspondants, la priorité relative de divers objectifs (emploi, inflation, équilibre budgétaire, équilibre extérieur...) etc.... Les limites des techniques de simulation, susceptibles de remettre en cause leur adéquation au but poursuivi, expliquent donc un recours accru aux techniques d'optimisation pour traiter du thème monétaire et fiscal. Le lecteur peut ainsi se reporter aux travaux récents suivants : ABEL (1975), COOPER, FISCHER (1975) PYNDICK (1973a, 1973b). La problématique suivie dans ces divers travaux consiste à spécifier au départ non une classe de politiques mais une *classe de fonctions objectif* (ou de coût). Des politiques optimales correspondant à ces fonctions sont *ensuite* calculées, le mode de calcul pouvant différer suivant l'étude[1]. Les fonctions de coût retenues pénalisent les écarts relatifs à diverses variables

./.

----

(1) PYNDICK (1973a, 1973b) calcule ainsi des politiques *déterministes* associées à un schéma linéaire-quadratique classique. COOPER et FISCHER (1975) réalisent une approximation linéaire particulière d'un modèle non linéaire (voir III.A.b) puis procèdent à la détermination de politiques optimales *stochastiques* sur le schéma linéaire-quadratique ainsi obtenu. Enfin l'étude d'ABEL (1975) propose divers algorithmes de résolution.

par rapport à une trajectoire donnée. La variation des poids relatifs correspondants permet donc d'étudier de manière générale les possibilités de *stabilisation efficace* attachées à un instrument, ou un ensemble d'instruments, particulier .
La méthode donne ainsi une réponse non ambiguë au problème de l'efficacité relative des instruments fiscaux et monétaires. Elle permet en outre de différencier de manière significative le "bon usage" de chaque instrument. Sur ce dernier point et à titre d'exemple, une des conclusions de l'article de PYNDICK est que l'instrument monétaire agissant avec des délais plus importants que l'instrument fiscal doit être manié de manière beaucoup plus "vigoureuse".

b) Délais et instabilité.

Les mécanismes intertemporels régissant l'évolution d'un système économique particulier peuvent entraîner l'existence d'écarts entre l'application d'une mesure de politique économique et l'apparition de ses premiers "effets" et, également, impliquer une allure spécifique pour l'"étalement" de ces derniers. L'élaboration de la politique économique doit tenir compte de ces "*délais*" de réaction sauf à créer d'éventuels effets pervers. Ainsi, M. FRIEDMAN (1953), tirant argument de la mauvaise connaissance de ces phénomènes, a recommandé de s'abstenir de toute politique "volontariste" en matière de régulation : l'absence de décision peut être préférable à des décisions prises à contre-temps qui risqueraient de "renforcer" l'ampleur des mouvements conjoncturels(1). Ce thème des "délais" de politique économique et de l'"instabilité" qu'ils peuvent générer a fait l'objet de diverses études. Plusieurs se rattachent en particulier au débat présenté ci-dessus , les instruments monétaires et fiscaux semblant se distinguer par la forme de leurs délais d'action (voir par exemple DAVID (1972) pour le cas de l'économie française).

./.

---

(1) Cette conception "fataliste" de la politique économique conduit au minimum à laisser faire les "stabilisateurs automatiques", au plus à admettre certaines règles globales peu modulées (ex : croissance de la masse monétaire au rythme de la PIB).

Ce paragraphe fournit une présentation synthétique de travaux traitant de ces questions, qui procède par simulation ou optimisation. Il a paru pertinent de distinguer deux cas :

- le cas où les délais de réaction sont connus ;
- le cas où les délais de réaction ne sont pas connus.

Cette distinction est plus que méthodologique. Elle renvoie à deux *catégories économiques* distinguables qui ont souvent été mélées dans l'analyse, à savoir d'une part *l'allure* des délais de réaction (*longueur* moyenne en particulier) d'autre part la *variabilité* de ces délais.

. Le cas où les délais de réaction sont connus a fait l'objet de plusieurs études utilisant des règles de politiques définies a priori, dans la ligne des travaux de PHILIPPS (1954,1957).

Une première analyse systématique est fournie par l'article de BAUMOL (1961) qui, sur la base d'un *modèle simple de type accélérateur-multiplicateur sans incertitude*, met en évidence un antagonisme possible entre "amortissement" et "fréquence".
Le modèle étudié est du type suivant :

$$Y(t) = \underbrace{a\,Y(t-1)}_{\text{consommation}} + \underbrace{b[Y(t-1) - Y(t-2)]}_{\text{investissement}} + \underbrace{X}_{\text{dépenses autonomes}} \qquad (37)$$

L'auteur considère des politiques du type

$$X = \alpha\, Y(t-1) + \beta\,[Y(t-1) - Y(t-2)] + X^{*} \qquad (38)$$

L'étude de stabilité de l'évolution induite revient à l'étude d'une équation du type :

$$Y(t) + b_1\, Y(t-1) + b_2\, Y(t-2) = Y^{*} \qquad (39)$$

donc à l'analyse des racines de :

./.

$$r^2 + b_1 r + b_2 = 0 . \qquad (40)$$

Le système est stable dès lors que max $|r| < 1$. Il est oscillant si les racines sont complexes, la période étant reliée à l'argument correspondant.
L'étude du domaine de stabilité conduit l'auteur à souligner les dangers de déstabilisation d'un système économique par une politique conjoncturelle mal adaptée. HOWREY (1967) complète l'analyse en incluant des *éléments stochastiques additifs non contrôlés.*
L'étude de stabilité du système revient à l'étude d'une équation du type :

$$Y(t) + b_1 Y(t-1) + b_2 Y(t-2) = Y^* + u(t) \qquad (41)$$

où u(t) est aléatoire.
L'auteur souligne les inconvénients qu'il peut y avoir, du point de vue de la "limite stochastique" stationnaire du système, à rechercher un amortissement "déterministe" trop rapide.
Utilisant des techniques d'analyse spectrale, HOWREY démontre en outre une substitution possible entre "variance" et "fréquence" du processus stochastique limite (la fréquence dominante étant repérée par le pic de la fonction de densité spectrale).

Enfin les articles de FISCHER,COOPER (1973) et COOPER,FISCHER (1972c) fournissent des éléments de réponse au problème du lien entre risque de déstabilisation d'un système et forme des délais. Les auteurs considèrent le modèle suivant :

$$c(t) = \beta\, c(t-1) + \sum_{\tau=0}^{\infty} \alpha_\tau\, d(t-\tau) + u(t) \qquad (42)$$

Les délais "directs" de politique économique, α_τ, sont supposés correspondre à une distribution de PASCAL
soit $\alpha_\tau = (1-\lambda)^r C^\tau_{r+\tau-1} \lambda^\tau$, l'essentiel de l'étude considérant le cas particulier d'une distribution de KOYCK (r=1). Notons que même dans ce cas la convolution avec le mécanisme autoregressif (terme en $\beta\, c(t-1)$) peut conduire à une distribution "finale" des délais

présentant un pic. Les auteurs considèrent des politiques "a priori" de la forme.:

$$d(t) = g_1 \, c(t-1) + g_2 \, (c(t-1) - c(t-2)) \qquad (43)$$
$$g_1 < 0 \quad , \quad g_2 < 0$$

et étudient le domaine de stabilité —c'est-à-dire l'ensemble des g_1 et g_2 conduisant à une évolution stable de (42) (convergence vers un processus limite)— en fonction des paramètres β, λ, r définissant l'allure des délais. Une conclusion de l'étude est que l'allongement des délais de réaction (β et λ croissants), si il diminue l'efficacité d'une politique du type (43), réduit également les "chances" de déstabilisation du système (élargissement du domaine de stabilité).

Les études précédentes traitent ainsi des caractéristiques d'un système contrôlé par certaines règles de politiques définies a priori. Ils n'étudient pas, par contre, l'évolution intertemporelle des mesures à mettre en oeuvre. GRAMLICH (1971) a attiré l'attention sur le fait que la recherche d'un stabilisation trop rapide de certains objectifs macroéconomiques (PIB par exemple) peut conduire à une évolution explosive des mesures de politique économique. On le voit aisément sur le "modèle" simple suivant, soit

$$c(t) = a_1 \, d(t) + a_2 \, d(t-1) \qquad (44)$$

La stabilisation à c = 0 peut s'effectuer en choisissant une séquence de mesures telles que :

$$d(t) = - \frac{a_2}{a_1} \, d(t-1)$$

L'évolution correspondante est bien sûr explosive dès lors que a_2 est supérieur à a_1 (effet retardé plus important que effet immédiat). Ce problème de l'"instabilité instrumentale" a été étudié de manière systématique, suivant les termes de la spécification (44), par HOLBROOK (1975). L'auteur donne un critère général de stabilité satisfait en particulier lorsque l'effet de la mesure décroît dans le temps (cas précédent : $a_1 > a_2$).

Si l'on considère maintenant l'approche de ces problèmes par les méthodes d'optimisation, notons que certaines questions, en particulier celle de l'instabilité instrumentale, s'évanouissent ou du moins se posent en termes différents.
Ainsi que l'a souligné TURNOVSKY (19), pour le cas de schémas linéaires-quadratiques "classiques" du type ( ) l'instabilité instrumentale (ou plus généralement l'instabilité den'importe quelle variable) ne risque d'apparaître lorsqu'on contrôle optimalement un système, c'est-à-dire lorsqu'on rend minimum une fonction objectif sur l'ensemble des périodes concernées, que s'il y a défaut de valorisation des variables correspondantes[1]. Le résultat est intuitivement trivial : si l'on accorde un "intérêt", même très faible, mais non nul à la stabilisation d'une variable, la politique optimale correspondante ne la laissera pas partir à "l'infini"[2]. En particulier, si l'on valorise, même peu, les instruments, la politique optimale stationnaire correspondante garantit leur stabilité.

./.

---

(1) On suppose que le système est stabilisable, c'est-à-dire qu'il existe au moins une politique admissible conduisant à une évolution stable. La condition est satisfaite si le système est endogènement stable (contrôle nul).

(2) En termes mathématiques, ceci revient à dire que la matrice R de ( ) est strictement définie positive. La considération de matrices semi-définies positives peut faire apparaître des phénomènes de "saut" dans la politique de stabilisation d'un système ainsi que dans ses caractéristiques limites (pour une illustration voir DELEAU, MALGRANGE (1976)).

En ce qui concerne le lien entre "allure" des délais de réaction et "allure" des politiques *optimales* correspondantes, il faut reconnaître qu'aucune étude systématique n'existe sur la question. Pour le cas précis du débat monétaire - fiscal, PYNDICK (1973a) a retrouvé la conclusion, assez intuitive, que la présence de délais longs conduit à un maniement plus vigoureux de l'instrument, (en l'occurrence l'offre de monnaie).

. Le cas où les délais de réaction ne sont pas parfaitement connus veut illustrer une autre caractéristique de ces délais, évoquée fréquemment par les empiristes, à savoir leur *variabilité*. On conçoit que ceci pose problème pour la politique économique, indépendamment de l'allure des caractéristiques *moyennes* de ces délais (délai *moyen* de réaction plus ou moins long etc...). Ce problème de la variabilité des délais a été étudié par simulation dans les articles de FISCHER, COOPER (1973), COOPER, FISCHER (1972c). Ces articles utilisent la psécification donnée en (42) mais considèrent le cas ou λ (premier article) ou β (deuxième article) sont variables.
Par exemple pour le cas λ variable, le modèle (42) est réécrit sous la forme :

$$c(t) = \beta\, c(t-1) + w(t) + u(t) \qquad (45)$$

où w(t) représente les effets totaux directs des décisions présentes et passées.
w(t) est pris de la forme :

$$w(t) = (1-\beta)\,(1-\lambda(t))\,x(t) + \lambda(t)\,w(t-1) \qquad (46)$$

avec $\lambda(t) = \lambda + \varepsilon(t)$
et $\varepsilon(t)$ aléatoire, indépendant de période à période et des u(t).
On voit d'ailleurs que dans ce cas, pour une décision donnée, il y a incertitude non seulement sur le profil de ses effets mais sur leur somme (multiplicateur de long terme). Etant donné des politiques du type (43), les caractéristiques de stabilisation du système sont

./.

appréciées comme précédemment, par la variance asymptotique. Les auteurs obtiennent ainsi les conclusions suivantes :

- un accroissement de variabilité des délais conduit à une réduction du domaine de stabiltié. Autrement dit, plus les délais sont variables, plus la politique doit être prudente.

- un accroissement de la longueur moyenne des délais accroît toujours le domaine de stabilité mais, contrairement au cas certain, peut réduire l'efficacité d'une politique donnée par rapport à la politique nulle.

Ces conclusions sur les liens entre variabilité des délais et prudence de la politique économique peuvent être rapprochées des conclusions obtenues en III.A.a ("précaution"). Une étude analytique du problème, pour le cas de politiques optimales, est donnée dans l'article de TURNOVSKY (1974) mentionné ci-dessus. L'auteur étudie les propriétés de stabilité (stochastique) de modèles du type de ceux considérés par CHOW (1973b) (voir III.A.a). Il vérifie analytiquement que l'introduction d'une incertitude sur les effets d'une mesure, et en particulier sur ses délais, réduisait les risques d'instabilité instrumentale (précaution accrue), lorsque l'instrument est fixé de manière optimale.

c) Objectifs intermédiaires, indicateurs et prévisions optimales.

Le débat engagé aux Etats-Unis sur les avantages comparés des instruments monétaires et fiscaux s'est accompagné de réflexions sur l'élaboration de la politique monétaire elle-même. Ces réflé-xions ont essayé de prendre en compte les conditions particulières [1] dans lesquelles cette politique doit être préparée et exécutée. Si l'on admet qu'elle vise, comme d'autres décisions publiques, à satisfaire certains objectifs macroéconomiques, il faut reconnaître que d'une part les liens entre actions de politique monétaire et conséquences macroéconomiques sont entâchées d'une incertitude notable, que, d'autre part, contrairement à d'autres décisions économiques (budgétaires, fiscales), les décisions monétaires se prennent à intervalles relativement rapprochés
et doivent se fonder sur certaines informations spécifiques. Il a donc paru significatif à de nombreux auteurs de structurer le problème en introduisant un certain nombre de notions originales.

A cet égard on doit reconnaître que les propositions faites et les débats adjacents n'ont pas eu pour caractéristique essentielle la clarté. L'objet de ceparagraphe est de présenter certains travaux d'optimisation traitant d'une bonne "confection" de la politique monétaire et il nous a donc paru pertinent de revenir rapidement en introduction sur ces débats, qui se sont fréquemment articulés autour des quatre principaux concepts d'objectif final. d'objectif intermédiaire, d'instrument et d'indicateur [2].

./.

---

(1) Il va de soi que bien des aspects des questions soulevées tiennent aux caractéristiques institutionnelles particulières du système monétaire Américain. Notre optique est de toute manière plus tournée vers les problèmes méthodologiques liés au traitement formalisé d'une question concrète de politique économique. A ce titre, les études citées présentent un intérêt qui déborde les conditions particulières d'application.

(2) La littérature correspondante est extrêmement volumineuse et parfois obscure. A titre d'introduction, le lecteur peut se rapporter aux articles de BRUNNER et METZLER (par exemple BRUNNER, METZLER (1967)). Il trouvera également plusieurs références dans la bibliographie des articles commentés plus bas.

Les notions d'objectif final et d'instrument ne posent guère de problème. La première notion correspond de fait à ce que nous avons appelé "objectif" de manière générale. Elle désigne les variables macroéconomiques dont la variation, ceteris paribus, "importe" aux décideurs publics (exemple : PIB, chômage, niveau général des prix, etc.). La notion d'instrument se réfère de même aux paramètres *directement contrôlés* par les autorités monétaires. La notion d'objectif intermédiaire quant à elle est nouvelle mais demeure claire. Un objectif intermédiaire est une variable "influencée" par les instruments et "influençant" les objectifs finaux. Autrement dit, "contrôler" un objectif intermédiaire implique indirectement un contrôle des objectifs finaux. En formalisant, on a donc

$$c^i = f(d,s) \qquad (47)$$

$$c^f = F(c^i, s') \qquad (48)$$

d = instrument, c^i = objectif intermédiaire

c^f = objectif final, s, s' = variables non contrôlées.

Beaucoup plus floue est la notion d' "indicateur". Un indicateur est théoriquement une variable permettant d'"apprécier' les "éffets" de la politique économique[1]. Nous pensons traduire au moins une partie des rôles attribués à un indicateur en le considérant comme *l'instrument d'observation* disponible pour la fixation des instruments. On peut par exemple supposer que cet indicateur est relié partiellement aux objectifs intermédiaires (HOLBROOK, SHAPIRO (1970)), soit :

$$in = h(c,s'') \qquad (49)$$

avec s" non contrôlé.

Etant donné ce formalisme, les études existantes peuvent être, dans une large mesure, regroupées autour de trois thèmes :

./.

---

(1) De nombreux auteurs insistent sur le fait qu'un indicateur doit permettre de démêler dans la variation d'objectifs ce qui revient "en propre" à la politique monétaire suivie. Il est facile de voir que cette exigence est très forte, sinon abérrante.

1 - Choix des c_i (quels objectifs intermédiaires retenir ?)

2 - A c_i donnés, choix des d.

3 - A c_i et d donnés, choix et utilisation d'un in.

On présente ci-dessous, des études portant sur les thèmes 1 et 2. Le thème 3 n'a pas à notre connaissance directement donné lieu à des études formalisées (une raison probable en étant la faible consistance de l'objet d'étude)[1].

. Le problème du choix d'objectifs intermédiaires a généralement été posé en termes de l'alternative masse monétaire (M) ou taux d'intérêt (r)[2].

Ainsi que l'a noté WAUD (1973) la question ainsi formulée n'est pas dépourvue d'ambiguité : le choix d'un objectif intermédiaire ne saurait être envisagé indépendamment du choix des instruments. En effet l'influence finale de la politique monétaire ne dépend pas seulement de la liaison (47) entre objectif intermédiaire et objectif final mais de la liaison (48) entre instrument et objectif intermédiaire. On peut donc considérer que les travaux posant l'alternative du choix entre M ou r comme objectifs intérmédiaires :

- soit supposent que M et r sont *parfaitement* contrôlables, et donc identifiables à des instruments ;

- soit étudient la question, peut être virtuelle, du choix entre M et r si on les suppose parfaitement contrôlables.

./.

---

(1) Notons que même si l'on retient la subdivision précédente, la catégorie dans laquelle on doit ranger *telle variable macroéconomique* fluctue suivant les auteurs. On verra dans la suite que deux variables fréquemment prises en compte sont la masse monétaire (M) et le taux d'intérêt (r). Ces variables sont considérées comme des *indicateurs* par ZECHER (1970). HOLBROOK, SHAPIRO (1970) et d'autres s'y réfèrent comme à des *objectifs intermédiaires* tandis que le problème du "choix" de l'un ou l'autre est souvent désigné comme le "*problème des instruments*" (par ex. TURNOVSKY (1975)).

(2) Avec des variantes sur définition de ces variables. HOLBROOK, SHAPIRO (1970) incluent en outre dans la liste la base monétaire elle-même.

Quelle qu'en soit l'interprétation, les diverses études formalisées traitant de ce thème se réfèrent toutes à des structures du type IS - LM dont on rappelle un prototype ci-dessous :

$$C = a_1 Y + a_2 + u_1 \qquad (50)$$

$$I = b_1 r + b_2 + u_2 \qquad (51)$$

$$M^d = c_1 Y + c_2 r + c_3 + u_3 \qquad (52)$$

$$M^s = M \qquad (53)$$

$$M^d = M^s \qquad (54)$$

$$C + I = Y \qquad (55)$$

avec : Y = PIB ; C = consommation ; I = investissement ; M^d = demande de monnaie ; M^s = offre de monnaie ; M = masse monétaire ; r = taux d'intérêt.

L'objectif final est Y, les variables instruments M ou r. On prend une fonction objectif "finale" du type $u(Y) = (Y - Y^*)^2$.

Il est immédiat de vérifier que l'on ne peut fixer *à la fois* M et r mais qu'il faut choisir entre M ou r. L'alternative, sans importance dans le cas certain, n'est pas trivial dès lors qu'il y a incertitude. Cette incertitude pouvant intervenir de manière additive (variables u_1, u_2, u_3 pouvant correspondre à des chocs "conjoncturels") ou sur les coefficients structurels (variables a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3).
Ainsi on vérifie aisément par construction d'un graphique IS - LM classique que si les équations (50) et (51) sont très "stables"[1] par rapport à l'équation (52) alors il est préférable de retenir r plutôt que M et vice versa. La spécification exacte des modèles utilisés pour traiter de ce problème comporte certes des variantes suivant les auteurs (introduction du temps avec des multiplicateurs-accélérateurs,

./.

---

(1) C'est-à-dire peu incertaines.

d'une fonction offre de monnaie etc...), la nature de l'incertitude considérée peut également différer mais, à tous égards, le schéma très simple qui vient d'être présenté et la problématique correspondante constituent des références centrales.

Ce cadre défini, on peut aisément regrouper les études formalisées existantes. Le tableau 1 distingue ainsi suivant l'horizon (modèle statique ou dynamique) la nature de l'incertitude (additive et/ou sur les coefficients), les calculs de politique effectués (simulation (S) ; équivalence au certain (EC) ; politique avec "précaution" (P) - cf III.A.a)

Incertitude \ Cadre temporel	Statique	Dynamique
Additive	POOLE (1970) (EC)	SARGENT (1971) (S) MOORE (1972) (S) TURNOVSKY (1975) (EC)
Coefficients	KAREKEN (1970) (P) HOLBROOK, SHAPIRO (1970) (EC)	TURNOVSKY (1975) (P)

TABLEAU 1 - Le choix d'objectifs monétaires intermédiaires.

Notons que parmi ces différents auteurs, seuls procèdent à des optimisations stricto sensu TURNOVSKY (1975), POOLE (1970) et KAREKEN (1970). HOLBROOK et SHAPIRO (1970) considèrent des politiques d'équivalence au certain dans un schéma où elles sont sous-optimales (incertitude mulitplicative). SARGENT (1971) et MOORE (1972) étudient les conséquences de contrôles "a priori" de M ou r (politiques à la PHILIPPS).

L'étude la plus complète d'un point devue méthodologique et technique est, à tous égards, celle de TURNOVSKY (1975). Le modèle utilisé est du type précédent mais dynamique : la consommation à t est liée à la PIB à t-1, l'équation d'investissement comporte un

terme d'accélération. Avec ce modèle, l'auteur étudie le problème du choix entre M et r sous les hypothèses alternatives d'une incertitude limitée aux termes additifs ou portant également sur les coefficients de manière stationnaire (Cf CHOW (1973b), TURNOVSKY (1974)).
On peut noter enfin que plusieurs auteurs ont montré que les conclusions étaient assez largement sensibles à la spécification du modèle (exemples : inclusion de "retards" danslafonction de demande de monnaie, existence d'un effet PIGOU pour la consommation etc...) (voir SARGENT (1971), TURNOVSKY (1975)).

. Supposant résolu le choix d'objectifs intermédiaires et de valeurs "optimales" pour ces objectifs, se pose le problème de la politique monétaire elle-même. Autrement dit pour revenir aux termes de la spécification (47) à (49), étant donné c_i^* comment faut-il choisir d de telle manière que c_i approche c_i^* "au mieux" ? On voit que ce problème peut être traité suivant un schéma très classique d'optimisation. Cette approche à été suivie dans l'article de PYNDICK et ROBERTS (1974). Les auteurs utilisent une version du modèle mensuel FRB du marché monétaire américain. Deux instruments sont pris en compte : les réserves non empruntées, le taux d'escompte. Dans la plupart des calculs, un très fort coût est attaché à la variation du taux d'escompte et les réserves non empruntées jouent le rôle instrumental principal. Par variation des "poids" correspondants, les auteurs étudient les possibilités de stabiliser "au mieux" deux objectifs intermédiaires : le taux sur les bons du trésor à 90 jours, la masse monétaire (billets + dépôts).
L'enregistrement des écarts moyens aux valeurs souhaitées, en déterministe et en stochastique, permet de caractériser les substitutions existantes en matière de stabilisation "intermédiaire" et les implications pour les diverses variables du modèle. A titre d'illustration on peut noter la conclusion suivant laquelle un bon contrôle de la masse monétaire est possible mais a des effets plus largement déstabilisant qu'un contrôle des taux d'intérêt.

. Reste enfin le problème du choix d'"indicateurs" c'est-à-dire, dans notre conception, de variables d'"information" sur

lesquelles fonder les décisions de politique monétaire. Il n'existe pas à notre connaissance de traitement formalisé satisfaisant de ce problème pour le cas de la politique monétaire.
Nous avons dit qu'une raison nous en semblait être la faible précision du concept dans la littérature existante. Si l'on s'en tient à la seule fonction "observation"—ou si l'on préfère "information"—, des observations méthodologiques intéressantes, et qui pourraient s'appliquer en particulier au domaine monétaire, figurent dans la série d'articles de JOHANSEN (1972), GRANGER (1973), HERSOUG et JOHANSEN (1975). Le problème étudié par ces auteurs est celui du meilleur usage de "prévisions" (forecasts) données. Autrement dit, étant donné des prévisions $\tilde{s}$ (statistiques fournies par un Institut par exemple) relatives à des variables non contrôlées s, quelle est la manière optimale d'utiliser $\tilde{s}$? FRIEDMAN (1953) par exemple a souligné le danger qu'il y avait à faire systématiquement "comme si" les prévisions étaient égales aux vraies valeurs.

Les auteurs mentionnés ci-dessus traitent ce problème à partir d'un schéma linéaire-quadratique pur soit :

$$c = Md + s$$
$$u(c) = (c - c^*)^2$$

Il est immédiat de vérifier que pour cette formalisation il est optimal de faire comme si $\tilde{s}$ était réduit non pas à s mais à $E[s|\tilde{s}]$ (équivalence au certain).Si l'on admet que l'incertitude concernée est représentable par des lois Gaussiennes, alors ces espérances conditionnelles ne sont autres que les *régressions* de s par rapport à $\tilde{s}$. Pour un échantillon suffisamment long (et un mode de production "stationnaire" des prévisions), ces régressions peuvent être identifiées aux estimations par moindres carrés ordinaires (HERSOUG,JOHANSEN (1975)). On vérifie ainsi que si une prévision $\tilde{z}_i$ est systématiquement "mauvaise", autrement dit si $\tilde{z}_i$ se révèle en moyenne très peu corrélé avec z_i, cette procédure conduira à faire "très peu comme si" z_i était égal à $\tilde{z}_i$. Des évaluations numériques utilisant cette problématique et relatives à la Norvège et à la Suède figurent dans l'article de HERSOUG et JOHANSEN.

./.

d) Le problème de l'affectation "instruments-objectifs".

Le problème de l'affectation "instruments-objectifs" peut être conçu comme lié à la recherche d'une "décentralisation" de la politique économique. Si l'on revient par exemple au modèle initial de TINBERGEN (II.A), on observe que, sauf hiérarchies particulières, la réalisation *exacte* des objectifs nécessite des mesures de politique économique *entièrement coordonnées*. Une mesure ne saurait être affectée à la réalisation d'un objectif particulier si l'on veut demeurer dans une optique de stricte optimalité. Il est licite toutefois de s'intérroger sur la possibilité de mettre en oeuvre une politique plus "décentralisée" quitte à sacrifier quelque peu en exactitude ou, plus généralement, en optimalité. Telle est la problématique du modèle classique de MUNDELL (voir également HANSEN (1967)). L'auteur considère le cas de deux centres de décision (une Banque Centrale, un Minitère des Finances) disposant chacun d'un instrument. Deux variables objectif sont prises en compte. MUNDELL démontre que si chaque centre de décision vise le niveau souhaité del'objectif sur lequel il a l'influence "la plus directe", alors le système, régulé de manière décentralisée, converge vers les valeurs cibles.

On considèrera dans ce paragraphe quelques extensions de cette première approche. L'exposé sera relativement plus bref que pour les autres thèmes. La plupart des contributions se situent en effet directement dans la ligne des travaux de MUNDELL et cherchent à démontrer qu'il existe une politique décentralisée "stable". Leur problématique est donc classique et bien connue (cf études sur le tâtonnement). L'exposé relatif à l'application des méthodes d'optimisation se limitera quant à lui à la présentation d'un seul schéma, d'ailleurs fort intéressant, dû à PYNDICK (PYNDICK (1975)).

. Les extensions du modèle de MUNDELL ont eu pour objet de prendre en compte des modèles de taille quelconque (n objectifs, n instruments), et simultanément, d'obtenir les résultats mathématiques les plus généraux possibles. Une contribution synthétique récente dans cette voie est fournie par l'article de FORTIN (1974) que nous commenterons birèvement. L'auteur considère un modèle en temps continu où les variations $\dot{c}(t)$ des variables objectif dépendent linéairement des instruments d(t) soit

$$\dot{c}(t) = B\, d(t) \tag{56}$$

B est une matrice n x n.
On suppose que l'on veut atteindre un ensemble de valeurs "désirées" c^* des objectifs et on considère des politiques du type :

$$d(t) = R\,(c(t) - c^*) \tag{57}$$

Autrement dit les décisions sont modifiées en fonction des écarts "réalisé - désiré". Une politique "R" sera dite *décentralisée* si chaque $d_i(t)$ est relié à un *seul écart* $x_k(t) - x_k^*$. Plus précisément, on recherche des politiques R de la forme :

$$R = E\, D \tag{58}$$

D est une matrice n x n diagonale positive, E une matrice n x n telle que dans chaque ligne et colonne il y ait un élément et un seul non nul. Cet élément est pris égal à + 1 ou - 1 de telle manière que la diagonale de B E D soit négative.
Une politique R = E D ainsi définie est bien décentralisée puisque chaque décision réagit à un seul écart. En outre l'effet direct de chaque mesure sur l'objectif auquel elle est affectée le ramène vers la valeur désirée.
On peut dire que D définit les vitesses d'ajustement et E l'affectation.
Le problème à résoudre est celui de l'existence de matrices E et D satisfaisant les conditions énoncées ci-dessus et telles que B E D soit *stable*.

On peut à cet égard distinguer deux problèmes d'affectation (FORTIN (1962)) :
- un problème d'affectation "faible" : à B donné, existe-t-il E et D telles que B E D soit stable ?

./.

- un problème d'affectation "forte" : à B donné existe-t-il une matrice E telle que B E D soit stable *pour tout* D ?

L'application d'un résultat dû à MAC FADDEN (MAC FADDEN (1969)) permet de donner une réponse affirmative à la première question. Qui plus est, on peut obtenir une convergence sans oscillation. Par contre pour n > 2 et sauf conditions particulières sur B (du type par exemple de dominance diagonale) le problème d'affectation "forte" n'a pas en général de solution : on ne peut décider sans coordination des vitesses relatives d'ajustement des décisions. Une application de cette problématique à un modèle macroéconomique figure dans l'article de AOKI (1974).

. Si l'approche par politiques définies a priori qui vient d'être décrite peut être considérée comme bien achevée, il n'existe par contre que peu de contributions sur le thème de l'"affectation" qui utilisent des techniques d'optimisation. Notons que dans le cadre du modèle précédent l'application de ces méthodes pourrait être envisagée (recherche de "meilleurs" E et D). A notre connaissance, une telle étude n'existe pas.

Par contre une voie de recherche nouvelle et intéressante, directement reliée au thème considéré ici, a été ouverte dans un article de PYNDICK (1975).
L'auteur considère une organisation avec deux centres de décision autonomes ayant chacun le contrôle d'instruments spécifiques et des fonctions objectif *différentes*. Chaque centre agit "au mieux", le résultat étant ainsi un équilibre à la NASH. Deux types de comportement sont considérés : chaque "agent" fixe la valeur de ses instruments "une fois pour toutes", ou bien, à chaque période, tient compte des actions de l'autre agent (approche stratégique). Des expressions analytiques des contrôles optimaux correspondants sont données dans l'article. Une application numérique utilise un modèle "monétaire-fiscal" présenté dans des contributions antérieures (PYNDICK (1973a, 1973b)). Dans l'application, on suppose que chaque centre de décision (monétaire et fiscal) se réfère à une même trajectoire mais accorde

des *poids différents* à la stabilisation de divers objectifs (en particulier l'emploi et le niveau des prix). Trois situations sont analysées. Dans la première chaque autorité a les mêmes préférences (cas classique, servant de référence). Dans la seconde, l'autorité monétaire se fixe uniquement sur le niveau des prix et l'autorité fiscale sur l'emploi, la position inverse étant considérée dans le troisième cas.
A partir de ce schéma, l'auteur examine les implications, pour la stabilisation de l'ensemble du système, de ce que l'on peut considérer comme diverses affectations d'objectifs aux deux centres de décision.

Pour terminer, on peut mentionner les possibilités d'application de schémas d'équipes (MARSCHAK, RADNER (1972)) à la recherche de politiques optimales *décentralisées du point de vue de l'information*. On trouvera ainsi dans l'étude Optimix des exemples de politiques "non coordonnées" (quant à l'information) qui réalisent une affectation instrument - aléa (DELEAU, GUESNERIE, MALGRANGE (1973)).

C/ Méthodes d'optimisation et analyse des modèles.

On a vu que, dans de nombreuses études appliquant les méthodes d'optimisation à des calculs de politique économique, l'approche consiste à spécifier au départ non pas *une* fonction-objectif mais *une classe* de fonctions objectif. La variation des paramètres correspondants permet ainsi d'atteindre des enseignements *globaux* sur l'aptitude d'un modèle contrôlé à suivre une trajectoire fixée a priori et sur les antagonismes qui lui sont inhérents en matière de stabilisation.

On conçoit donc que de tels enseignements, indépendamment de l'intérêt qu'ils peuvent présenter du point de vue de la définition de politiques économiques, contribuent à l'analyse *synthétique* des propriétés d'un modèle de politique économique. On peut ainsi révéler notamment les *courbes de substitution entre objectifs* caractéristiques d'un modèle donné (par exemple des "courbes de PHILIPPS" implicites). Le lecteur trouvera aussi une illustration des possibilités offertes par le recours à des techniques d'optimisation pour l'analyse des modèles

./.

dans les travaux de OUDET (1975). L'auteur met en évidence de manière très claire par des calculs d'optimisation appliqués à STAR l'antagonisme notable entre croissance et équilibre du commerce extérieur inhérent à ce modèle.

On peut donc légitimement considérer que, indépendamment des usages décrits ci-dessus, les techniques d'optimisation constituent un instrument précieux d'analyse des modèles et apportent un complément spécifique aux autres méthodes disponibles, notamment de simulation (cf DELEAU, MALGRANGE (1975)).

On reviendra d'ailleurs pour terminer sur la comparaison entre simulation et optimisation. On a souligné plus haut les avantages techniques de la première approche, qui demeurent bien sûr en matière d'analyse de modèle : facilité de mise en oeuvre, universalité d'application. On peut répéter également que, du fait de son caractère "a priori", l'usage en simulation d'un modèle peut ne pas toujours donner des réponses entièrement pertinentes.
Ainsi, la caractérisation des contraintes qu'un modèle donné implique pour la politique économique, ne peut s'effectuer de manière entièrement satisfaisante par des techniques de simulation procédant par exemple par injection de règles a priori. Il faut toutefois à ce niveau concéder un point, à savoir que les réponses d'un modèle à l'application de méthodes d'optimisation, si elles sont "efficaces" à coup sûr d'un point de vue global, sont parfois considérées comme mal maîtrisables "analytiquement" Ainsi, les caractéristiques des politiques obtenues sont très rarement commentées et reliées explicitement aux caractéristiques du modèle. On pourrait presque dire que les techniques de simulation recourent à des politiques bien comprises, puisque définies a priori, mais ne donnent pas forcément des réponses pertinentes d'un point de vue global, tandis que les méthodes d'optimisation donnent des réponses significatives mais pas toujours maîtrisables analytiquement, en particulier au niveau des politiques. A cet égard, certains résultats présentés dans une autre note (DELEAU, MALGRANGE (1976)) pourraient contribuer à alléger cette dernière difficulté. On y propose des résultats analytiques généraux, qui

éclairent la structure profonde du problème et donnent une caractérisation simple des politiques optimales. On démontre ainsi que toute politique optimale à la THEIL est une combinaison linéaire de politiques extrêmes à la TINBERGEN, la somme des poids étant égale à l'unité. Ces poids s'interprêtent aisément en fonction des caractéristiques du modèle et de la fonction objectif, la combinaison correspondante étant convexe pour des fonctions objectif quadratiques diagonales. Il suffit donc pour "comprendre" le résultat d'un processus d'optimisation de "comprendre" la signification des politiques extrêmes, ce qui est généralement aisé, et de procéder ensuite à une combinatoire. On trouvera dans la note une application de cette approche au modèle dynamique monétaire-fiscal proposé par ABEL (1975).

./.

IV - CONCLUSION.

Cette note a démontré, du moins on l'espère, l'intérêt que présente l'application des méthodes d'optimisation aux modèles macroéconomiques de politique économique, qu'il s'agisse d'étudier certains problèmes spécifiques de politique ou de mieux analyser les caractéristiques du modèle lui-même. Pour ces deux rôles, les techniques d'optimisation présentent des avantages spécifiques qui en font des compléments précieux à d'autres approches (simulation par exemple).

On voudrait d'ailleurs terminer en insistant sur l'aspect proprement *technique* de ces méthodes, qui leur confère donc à bien des égards un rôle subordonné. D'une part, si l'on considère le processus de prise de décision lui-même, la pratique de méthodes d'optimisation ne signifie pas bien sûr que l'on adhère à une conception mécaniste naïve de la politique économique, qui voudrait en réaliser une gestion entièrement "automatisée". D'autre part, il est bien évident que l'intérêt présenté par l'utilisation de ces techniques dépend plus de la qualité des modèles auxquels elles s'appliquent que de leur sophistication propre. Il s'ensuit que certains développements intéressants sur le plan théorique ou applicables dans d'autres domaines —tels que la recherche de contrôles "duaux" prenant en compte l'interaction décision-information— n'apparaissent pas à l'heure actuelle d'un intérêt essentiel pour des applications macroéconomiques.

-oOo-

BIBLIOGRAPHIE

ABEL A. (1975)
A comparison of three control algorithms as applied to the monetarist fiscalist debate.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 4, n° 2.

ANDERSEN L.C., CARLSON K. (1970)
A monetarist model for economic stabilization.
Federal Reserve Bank of S^t Louis Review, Vol. 52, n° 1.

AOKI M. (1973)
On sufficient conditions for optimal stabilization policies.
Review of Economic Studies, Vol. 40, n° 121.

AOKI M. (1974)
Non interacting control of macroeconomic variables. Implications on policy mix considerations.
Journal of Econometrics, Vol. 2, n° 3.

ATHANS M. (1972)
The discrete time linear-quadratic-gaussian-stochastic control problem.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 1, n° 4.

ATHANS M. (1974)
The importance of Kalman filtering methods for economic systems.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, n° 1.

ATHANS M., CHOW G.C. (1972)
Introduction to stochastic control theory and economic systems.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 1, n° 4.

BAUMOL W.J. (1961)
Pitfalls in contracyclical policies : some tools and results.
Review of Economics and Statistics, Vol. 43, n° 1.

BELLMAN R. (1957)
Dynamic programming
Princeton University Press ; Princeton, New Jersey.

./.

BENISHAY H. (1972)
A framework for the evaluation of short-term fiscal and monetary policy.
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 4, n° 4.

BOWMAN H., LAPORTE A.M. (1972)
Stochastic optimization in recursive equation systems with random parameters with an application to control of the money supply.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 1, n° 4.

BOX O.E.P., JENKINKS G.M. (1970)
Time Series Analysis, Forecasting and control.
San Francisco ; Holden Day.

BRAINARD W. (1967)
Uncertainty and the effectiveness of policy
American Economic Review, Papers and Proceedings, Vol. 57, n° 2.

BRAY J. (1974)
Predictive control of a stochastic model of the U.K. economy simulating present policy making practice by the U.K. Government.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, n° 1.

BRAY J. (1975)
Optimal control of a noisy economy with the U.K. as an example.
Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 138, Part. 3.

BRUNNER K., METZLER A. (1967)
The meaning of monetary indicators in Monetary process and policy.
Ed. G. Horwich Irwin ; Homewood, Illinois.

BURGER A.E. (1971)
The implementation problem of monetary policy
Federal Reserve Bank of Saint-Louis Review.

CHOW G.C. (1970)
Optimal stochastic control of linear economic systems.
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 2

CHOW G.C. (1972a)
Optimal control of linear econometric systems with finite time horizon.
International Economic Review, Vol. 13, n° 1.

CHOW G.C. (1972 b)
How much could be gained by optimal stochastic control policies.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 2, n° 4.

CHOW G.C. (1973 a)
Problems of Economic Policy from the viewpoint of optimal control.
American Economic Review, Vol. 63, n° 5.

CHOW G.C. (1973 b)
Effect of uncertainty on optimal control policies.
International Economic Review, Vol. 14.

CHOW G.C., ATHANS M. (1974)
Introduction to selected papers from the second N.B.E.R. stochastic control conference.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, n° 1.

CHOW G. C. (1975)
An approach to the feedback control of non linear econometric systems.
Econometric Research Program, Memorandum n° 180.

COOPER R.N. (1969)
Macroeconomic policy adjustment in interdependent economies.
Quaterly Journal of Economics, Vol. 83, n° 1.

COOPER J.P., FISCHER S. (1972)
Simulation of monetary rules in the FRB-MIT Penn. model
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 4, n° 2.

COOPER J.P., FISCHER S. (1972)
Stochastic simulation of monetary rules in two macroeconometric models
Journal of the American Statistical Association, Vol. 67, n° 340.

COOPER J.P., FISCHER S. (1972 c)
Stabilization policy and lags : summary and extension.
Annals of Economic and Social Measurement, vol. 1, n° 4.

./.

COOPER J.P., FISCHER S. (1974)
Monetary and fiscal policy in the fully stochastic Saint-Louis Econometric model.
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 6, n° 1.

COOPER J.P., FISCHER S. (1975)
A method for stochastic control of nonlinear econometric models and an application.
Econometrica, Vol. 43, n° 1.

DAVID J.H. (1972)
Un modèle de l'Economie Française inspiré des thèses monétaristes.
Banque de France - Bulletin Trimestriel n° 5.

DAWSON D.C. (1968)
On the linear control of a linear system having a normal stationary stochastic input.
Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 30, n° 2.

DELEAU M., MALGRANGE P. (1972)
Information et politiques dynamiques contradictoires.
Annales de l'INSEE n° 9.

DELEAU M., GUESNERIE R., MALGRANGE P. (1973)
Planification, incertitude et politique économique : l'opération Optimix.
Revue Economique, Vol. 24, n° 5 et 6.

DELEAU M., MALGRANGE P. (1974 a)
Information and contrastochastic dynamic economic policies.
European Economic Review, Vol. 5, n° 2.

DELEAU M., MALGRANGE P. (1974 b)
Mécanismes dynamiques du modèle STARo, incertitude et politiques stabilisatrices.
Note CEPREMAP n° 7410

DELEAU M., MALGRANGE P. (1975)
Les méthodes d'analyse des modèles empiriques.
Annales de l'INSEE n° 20

./.

DELEAU M., MALGRANGE P. (1976)
Stabilisation des systèmes économiques dynamiques : frontière d'incertitude et politiques efficaces.
Note CEPREMAP n° 7602.

DUCHAN A.I. (1974)
A clarification and a new proof of the certainty equivalence theorem.
International Economic Review, Vol. 15, n° 1

FAIR R.C. (1974)
On the solution of optimal control problems as maximization problems.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3 n° 1.

EL. FATTAH Y.M., FOULARD C. (1975)
Commande adaptative sous-optimale de systèmes dynamiques récurrents linéaires avec des paramètres variables inconnus.
Revue Française d'Automatique, Informatique, Recherche Opérationnelle. Série Automatique, Novembre.

FISCHER S., COOPER J.P. (1973)
Stabilization policy and lags
Journal of Political Economy, Vol. 81, n° 4.

FORTIN P. (1974)
Can economic policy pair instruments and targets ? (Or should it ?)
Canadian Journal of Economics, Vol. 7, n° 4.

FOX K.A., SENGUPTA J.K., THORBECKE E. (1966)
The theory of quantitative economic policy.
North-Holland, Amsterdam.

FRIEDLAENDER A.F. (1973)
Macro-policy goals in the postwar period : a study in revealed preference.
The Quaterly Journal of Economics, Vol. 87, n° 1.

FRIEDMAN B.M. (1972)
Optimal economic stabilization policy : an extended framework.
Journal of Political Economy, Vol. 80, n° 5.

FRIEDMAN B.M. (1974)
Methods in optimization for economic stabilization policy.
North Holland, Amsterdam.

./.

FRIEDMAN M. (1953)
Essays in positive economics . The University of Chicago-Press.

FRISCH R. (1961)
Numerical determination of a quadratic preference function for use in macroeconomic programming.
Giornali degli Economisti Annali di Economica (Padova).

GARBADE K. (1975)
Discretion in the choice of macroeconomic policies.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 4, n° 2.

GRAMLICH E.M. (1971)
The usefulness of monetary and fiscal policy as discretionary stabilization tools.
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 3, n° 2.

GRANGER C.W.J. (1973)
On the properties of forecasts used in optimal economic policy decisions.
Journal of Public Economics, Vol. 2, n° 4.

DE GROOT M.H. (1970)
Optimal statistical decisions
Mac Graw-Hill, New-york.

GUESNERIE R., MALGRANGE P. (1972)
Formalisation des objectifs à moyen terme. Application au VIème Plan. Revue Economique, Vol.23, n°3.

HANSEN B. (1967)
Lectures in economic theory
Student Litterature, Lund

HAY G.A. (1972)
The dynamics of firm behaviour under alternative cost structures.
American Economic Review, Vol. 62, n° 3.

HAY G.A., HOLT C.C. (1975)
A general solution for linear decision rules : an optimal dynamic strategy applicable under uncertainty.
Econometrica, Vol. 43, n° 2.

HERSOUG T., JOHANSEN L. (1975)
Optimal use of forecasts in economic policy decisions : an empirical test.
Journal of Public Economics, Vol. 4, n° 4.

HOLBROOK R.S, SHAPIRO H. C. (1970)
The choice of optimal intermediate targets.
American Economic Review, Papers and Proceedings, Vol. 60, n° 2.

HOLBROOK R.S. (1972)
Optimal Economic Policy and the problem of instrument instability.
American Economic Review, Vol. 62, n° 1.

HOLBROOK R.S. (1974)
A practical method for controlling a large non linear stochastic system.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, n° 1.

HOLBROOK R.S. (1975)
Optimal policy choice under a non linear constraint : an iterative application of linear techniques.
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 7, n° 1.

HOLT C.C. (1962)
Linear decision rules for economic stabilization and growth.
Quaterly Journal of Economics, Vol. 76 n° 1.

HOLT C.C., MODIGLIANI F., MUTH J.F., SIMON H.A. (1960)
Planning production, inventories and work force.
Prenctice Hall, N.J.

HOWREY E.P. (1967)
Stabilization policy in linear stochastic systems
Review of Economics and Statiscics, Vol. 49, n° 3.

HOWREY E.P. (1969)
Distributed lags and the effectiveness of monetary policy : a note.
American Economic Review, Vol. 69, n° 5.

HOWREY E.P., KELEJIAN H.H. (1969)
Computer simulation versus analytical solutions.
In Naylor T.H. éd. - The design of computer simulation experiments.
Duke University Press, Durham, N.C.

./.

HUARD P. (1971)
Tour d'horizon : programmation non linéaire.
Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle.
5e année - R1.

JOHANSEN L. (1972)
On the optimal use of forecasts in economic policy decisions.
Journal of Public Economics, Vol. 1, n° 1.

JOHANSEN L. (1973)
Targets and instruments under uncertainty.
Mimeo.

JOHANSEN L. (1974)
Establishing preference functions for macroeconomic decision models. Some observations on Ragnar Frisch's contributions.
European Economic Review, Vol. 5, n° 1.

JOHNSON H.G. (1962)
Monetary theory and policy
American Economic Review, Vol. 52, n° 3.

KAREKEN J.H. (1970)
The optimum monetary instrument variable : A comment
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 2, n° 3.

KENDRICK D.,KANG,B.H. (1975)
An economist's guide to wide sense dual control.
Project on control in economics W.P. n° 75.
Department of Economics, University of Texas, Austin.

KERAN M.W. (1970)
Selecting a monetary indicator
Federal Reserve Bank of Saint-Louis Review.

KRIEBEL C.H. (1968)
Quadratic teams, information economics and aggregate planning decisions.
Econometrica, Vol. 36, n° 3-4

./.

KUHN H.W., SZEGO G.P. (1969)
Mathematical systems theory and economics.
Springer-Verlag ; Berlin.

KUSHNER H.J. (1974)
Some basic ideas in stochastic stability.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3, n° 1.

LIVESEY D.A. (1971)
Optimizing short-term economic policy.
Economic Journal, Vol. 81, n° 323.

LIVESEY D.A. (1974)
Optimization techniques and theory in the Cambridge growth project and the Leontief dynamic input-output model.
Mimeo.

MAC FADDEN D. (1969)
On the controllability of decentralised macroeconomic systems.
in Kuhn, Szegö éds.

MAC RAE E.C. (1972)
Linear decision with experimentation.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. A, n° 4.

MAC RAC E.C. (1975)
An adaptative learning rule for multiperiod decision problems.
Econometrica, Vol. 43, n° 5-6.

MALINVAUD E. (1969)
First order certainty equivalence.
Econometrica, Vol. 37, n° 4.

MARSCHAK J., RADNER R. (1972)
Economic theory of teams.
Yale University Press. New Haven.

MOORE B.J. (1972)
Optimal monetary policy.
Economic Journal, Vol. 82, n° 1.

./.

NORMAN A.L. (1974)
On the relationship between linear feed back control and first period certainty equivalence.
International Economic Review, Vol. 15, n° 1.

NORMAN A.L., NORMAN N.R. , PALASH C.J. (1974)
On the computation of deterministic optimal macroeconomic policy.
Project on control in Economics - W.P. n° 74 -1.
Department of Economics, University of Texas, Austin.

NORMAN A., WEATHERBY J. (1974)
On selecting economic targets.
Project on control in economics W.P. n° 74-4
Department of Economics University of Texas, Austin.

OUDET B. (1975)
Etude de la dynamique à court terme des modèles macroécénomiques.
Application à STAR.
Annales de l'INSEE n° 20.

PHILLIPS A.W. (1954)
Stabilization policy in a closed economy.
Economic Journal, Vol. 65 n° 258.

PHILLIPS A.W. (1957)
Stabilization policy and the time-form of lagged responses.
Economic Journal, Vol. 67 n° 266.

POOLE W. (1970)
Optimal choice of monetary policy instruments in a simple stochastic macro model.
Quaterly Journal of Economics, Vol. 84, n° 2.

PRESCOTT E.C. (1971)
Adaptive decision rules for macroeconomic planning.
Western Economic Journal, Vol. 9, n° 4

PRESCOTT E.C. (1972)
The multi-period control problem under uncertainty.
Econometrica, Vol. 40 n° 6.

./.

PRESTON A.J. (1972)
A paradox in the theory of optimal stabilization.
Review of Economic Studies, Vol. 31 n° 4.

PRESTON A.J. (1974)
A dynamic generalization of Tinbergen's theory of policy.
Review of Economic Studies, Vol. 41 n° 1.

PYNDICK R.S. (1972)
Optimal stabilization policies by deterministic control.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 1, n° 4.

PYNDICK R.S. (1973a)
Optimal planning for economic stabilization.
North-Holland, Amsterdam.

PYNDICK R.S. (1973b)
Optimal Policies for economic stabilization.
Econometrica, Vol. 41 n° 3.

PYNDICK R.S. (1973)
Optimal stabilization policies under decentralized control and conflicting objectives.
M.I.T. Working Paper 765-75.

PYNDICK R.S., ROBERTS S. (1974)
Optimal Policies for monetary control.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3 n° 1.

ROTSCHILD M., STIGLITZ J. (1970)
Increasing risk (I). A definition.
Journal of Economic Theory, Vol. 2.

SALIN P., CLAASSEN E., Eds (1972)
Stabilization policies in interdependent economics.
Amsterdam.

SARGENT T.J. (1971)
The optimum monetary instrument variable in a linear economic model.
Canadian Journal of Economics, Vol. 4 n° 1.

./.

SAVING T.R. (1967)
Monetary policy targets and indicators.
Journal of Political Economy, Vol. 75 , n° 4 Part II.

SHAPIRO H.T. (1971)
The efficacy of monetary and fiscal policy.
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 3 n° 2.

SHUPP F.R. (1972)
Uncertainty and stabilization for a non linear model.
Quarterly Journal of Economics, Vol. 86 n° 1.

SIMON H.A. (1956)
Dynamic programming under uncertainty with a quadratic criterion function.
Econometrica, Vol. 24 n° 1.

SIMS C.A. (1974)
Optimal stable policies for unstable instruments.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3 n° 1.

SWOBODA A.K. (1972)
On limited information and the assignment problem.
in SALIN P., CLAASSEN E. Eds.

TAYLOR L. (1970)
The existence of optimal distributed lags.
Review of Economic Studies, Vol. 37 n° 1.

TAYLOR J.B. (1974)
Asymptotic properties of multiperiod control rules in the linear regression model.
International Economic Review, Vol. 15 n° 2.

THEIL H. (1957)
A note on certainty equivalence in economic planning.
Econometrica, Vol. 25 n° 2.

THEIL H. (1958)
Economic forecasts and policy.
North Holland, Amsterdam.

THEIL H. (1964)
Optimal decision rules for government and industry.
North-Holland, Amsterdam.

THEIL H. (1971)
Principles of Econometrics.
J. Wiley and Sons.

TINBERGEN J. (1952)
On the theory of economic policy.
North-Holland, Amsterdam.

TINBERGEN J. (1954)
Centralization and decentralization in economic policy.
North-Holland, Amsterdam.

TINBERGEN J. (1956)
Economic policy : principles and design.
North-Holland, Amsterdam.

TSE E. (1974)
Adaptive dual control methods.
Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3 n° 1.

TURNOVSKY S.J. (1973)
Optimal stabilization policies for deterministic and stochastic linear economic systems.
Review of Economic Studies, Vol. 40 n° 1.

TURNOVSKY S.J. (1974)
The stability properties of optimal economic policies.
American Economic Review, Vol. 44 n° 1.

TURNOVSKY S.J. (1975)
Optimal choice of monetary instrument in a linear economic model with stochastic coefficients.
Journal of Money, Credit and Banking, Vol. 7 n° 1.

VAN DE PANNE C. (1965)
Optimal strategy decisions for dynamic linear decision models in feedback form.
Econometrica, Vol. 33 n° 2.

./.

VIOT M. (1964)

VIOT M. (1968)
Théorème d'optimalité pour des systèmes stochastiques où la commande est adaptée à l'état.
Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, n° 10 - R2.

WAUD R. (1973)
Proximate targets and monetary policy.
The Economic Journal, Vol. 83 n° 1.

WAUD R.N. (1976)
Asymmetric policymaker utility functions and optimal policy under uncertainty.
Econometrica, Vol. 44 n° 1.

WHITTLE P. (1969)
A view of stochastic control theory.
Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 132, Part 3.

WISHART D.M.G. (1969)
A survey of control theory.
Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 132, Part 3.

WONHAM W.M. (1968)
On the separation theorem of stochastic control.
SIAM Journal of Control, Vol. 6 n° 2.

YATES J.N. (1969)
Optimal policies for stabilization and growth.
mimeo.

YOUNG R.M. (1975)
Certainty equivalence, first order certainty equivalence, stochastic control and the covariance structure.
Econometrica, Vol. 43 n° 3.